Müller-Breslau,
профессоръ политехникума въ Берлинѣ.

Выпускъ X.

Графическая статика сооруженій.

Переводъ съ послѣдняго нѣмецкаго изданія.

Г. Г. Кривошеинъ,
Военный инженеръ, преподаватель Николаевской Инженерной Академіи и Училища.

П. Н. Казинъ,
Военный инженеръ.

Томъ II.

Содержаніе выпуска X:

I. Деформаціи прямого бруса. Примѣненіе къ сплошной балкѣ.
II. Многопролетныя балки.

Изданіе инженера П. Н. Казина.

С.-ПЕТЕРБУРГЪ.
Типо-литографія и переплетная Ю. А. Мансфельда, Малая Морская, № 9.
1900.

Müller-Breslau,
профессоръ политехникума въ Берлинѣ.

Выпускъ X.

Графическая статика сооруженій.

Переводъ съ послѣдняго нѣмецкаго изданія:

Г. Г. Кривошеинъ,
Военный инженеръ, преподаватель Николаевской Инженерной Академіи и Училища.

П. Н. Казинъ,
Военный инженеръ.

Томъ II.

СОДЕРЖАНІЕ выпуска X:

I. Деформаціи прямаго бруса. Примѣненіе къ сплошной балкѣ.
II. Многопролетныя балки.

Изданіе инженера П. Н. Казина.

С.-ПЕТЕРБУРГЪ.
Типо-литографія и переплетная Ю. А. Мансфельда, Малая Морская, № 9.
1900.

Дозволено цензурою, С.-Петербургъ, 12 Ноября 1900 г.

ОГЛАВЛЕНІЕ*)

ВЫПУСКА X.

ОТДѢЛЪ I.

Деформаціи прямаго бруса. Примѣненіе къ сплошной балкѣ.

стр.

§ 1. Основные законы 5
§ 2. Линія прогибовъ 16
§ 3. Прямая балка съ задѣланными концами 26

ОТДѢЛЪ II.

Многопролетныя балки.

§ 4. Балка съ произвольнымъ числомъ опоръ, перемѣщенія которыхъ заданы. 32
§ 5. Продолженіе. Вліяніе равномѣрно распредѣленной нагрузки 44
§ 6. Балка на упругихъ опорахъ 59
§ 7. Неразрѣзная промежуточная (продольная) мостовая балка 73
§ 8. Примѣненіе общихъ условій упругости къ статически неопредѣлимымъ балкамъ 86

*) Выпускъ X составляетъ вторую неоконченную часть II-го тома нѣмецкаго оригинала. Конецъ второй части и III-й томъ въ нѣмецкомъ подлинникѣ еще не напечатаны.

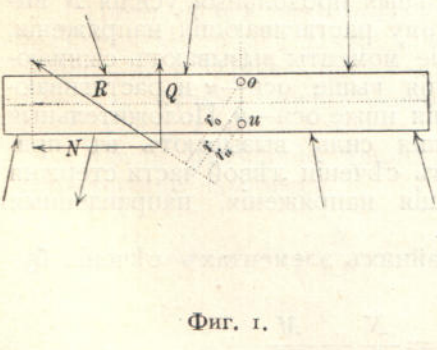
ОТДѢЛЪ I.

Деформаціи прямаго бруса. Примѣненіе къ сплошной балкѣ.

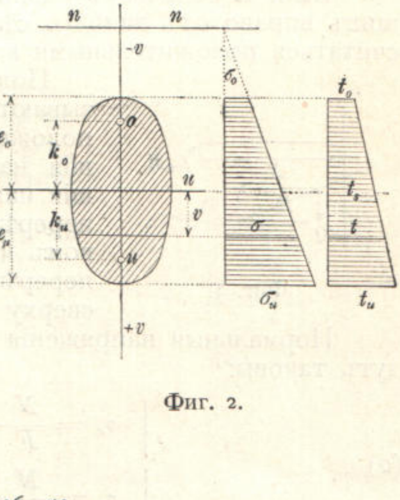
§ 1.

Основные законы *).

1. Нормальныя напряженія. Пусть на прямой стержень дѣйствуютъ силы, произвольно направленныя, но лежащія въ одной и той же полости. Пусть ось стержня лежитъ въ плоскости дѣйствія силъ, въ плоскости, которая разсѣкаетъ всѣ поперечныя сѣченія по главной оси *vv*, фиг. 1 и 2. Линія нулевыхъ напряженій *nn* будетъ тогда въ каждомъ сѣченіи перпендикулярна къ оси *vv*; *линія же прогибовъ* стержня (кривая изгиба), называемая также *упругой линіей*, будетъ лежать въ плоскости дѣйствія силъ.



Фиг. 1.



Фиг. 2.

*) См. томъ I, выпускъ I, отдѣлъ III, № 36—53.

Во всѣхъ элементахъ сѣченія, одинаково удаленныхъ отъ оси *nn*, вызываются одинаковыя нормальныя напряженія σ, величина которыхъ опредѣляется формулой

$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{Mv}{J}, \tag{1}$$

гдѣ F означаетъ площадь поперечнаго сѣченія,

J—моментъ инерціи площади поперечнаго сѣченія относительно оси *uu*, проходящей черезъ центръ тяжести сѣченія и перпендикулярной къ оси v,

v—разстояніе элемента сѣченія отъ оси u,

M—изгибающій моментъ относительно оси, проходящей черезъ центръ тяжести сѣченія,

N—продольное усиліе въ разсматриваемомъ сѣченіи.

Кромѣ нормальныхъ напряженій σ въ сѣченіи вызываются перерѣзывающія напряженія τ, на которыя пока не будемъ обращать вниманія.

Пусть R означаетъ равнодѣйствующую внѣшнихъ силъ, дѣйствующихъ по одну сторону разсматриваемаго сѣченія, а r—длину перпендикуляра, опущеннаго изъ центра тяжести сѣченія на направленіе R, тогда

$$M = Rr.$$

При разложеніи R по направленіямъ оси стержня и оси v получимъ продольное усиліе N и поперечную (перерѣзывающую) силу Q.

Относительно выбора знака установимъ слѣдующія данныя для чаще всего встрѣчающагося случая горизонтальной балки.

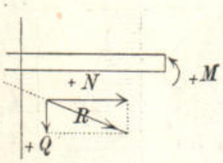
Если подъ R подразумѣвать равнодѣйствующую внѣшнихъ силъ, дѣйствующихъ слѣва отъ даннаго сѣченія, то

M будетъ положительно, если вращеніе происходитъ слѣва направо (т. е. по направленію движенія часовой стрѣлки),

N—положительно, если сила направлена справа налѣво,

Q—положительно, если сила направлена снизу вверхъ.

Если R означаетъ равнодѣйствующую внѣшнихъ силъ, лежащихъ вправо отъ даннаго сѣченія, то количества M, N, Q будутъ считаться положительными въ обратномъ направленіи, фиг. 3.



Фиг. 3.

Положительныя продольныя усилія N вызываютъ поэтому растягивающія напряженія; положительные моменты вызываютъ сжимающія напряженія выше оси—u и растягивающія напряженія ниже оси—u. Положительныя перерѣзывающія силы вызываютъ въ правомъ крайнемъ сѣченіи лѣвой части стержня перерѣзывающія напряженія, направленныя сверху внизъ.

Нормальныя напряженія въ крайнихъ элементахъ сѣченія будутъ таковы:

$$\left|\begin{aligned} \sigma_u &= \frac{N}{F} + \frac{Me_u}{J} = \frac{N}{F} + \frac{M}{W_u} \\ \sigma_o &= \frac{N}{F} - \frac{Me_o}{J} = \frac{N}{F} - \frac{M}{W_o}, \end{aligned}\right. \tag{2}$$

гдѣ

$$W_u = \frac{J}{e_u} \text{ и } W_o = \frac{J}{e_o} \tag{3}$$

представляютъ такъ называемые *моменты сопротивленія площади поперечнаго сѣченія*.

Если ввести сюда моменты, взятые относительно точекъ ядра o и u, лежащихъ на оси v, а именно

$$M^o = Rr_o \text{ и } M^u = Rr_u,$$

то уравненія (2) примутъ такой видъ:

$$\sigma_u = + \frac{M^o}{W_u}; \quad \sigma_o = - \frac{M^u}{W_o} \text{*)}. \tag{4}$$

Точки ядра отстоятъ отъ оси—u на разстояніяхъ

$$k_o = \frac{W_u}{F}; \quad k_u = \frac{W_o}{F}. \tag{5}$$

2. Деформаціи, вызываемыя нормальными напряженіями и измѣненіемъ температуры. Первоначальное разстояніе dx между разсматриваемымъ сѣченіемъ CC и сѣченіемъ CC', лежащимъ отъ него безконечно близко, измѣняется на величину

$$\Delta dx_v = dx \left(\frac{\sigma}{E} + \varepsilon t \right), \tag{6}$$

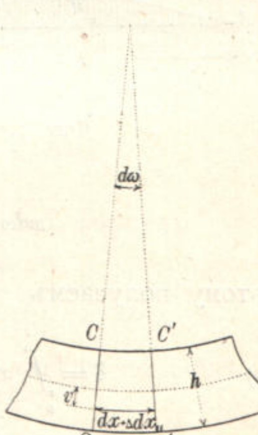
причемъ dx взято на разстояніи v отъ оси—u; здѣсь означаютъ

E—коэффиціентъ (модуль) упругости,
t—измѣненіе температуры для мѣста v (фиг. 2),
ε—коэффиціентъ линейнаго расширенія для $t = 1$.

Пусть E и ε одинаковы для всѣхъ точекъ сѣченія, а t, а также σ мѣняются съ величиной v. Пусть для $v = 0$, $v = + e_u$, $v = - e_o$ будемъ имѣть сооотвѣтственно $t = t_s$, $t = t_u$, $t = t_o$.

Тогда измѣненіе длины элемента dx оси стержня равняется

$$\Delta dx = dx \left(\frac{N}{EF} + \varepsilon t_s \right). \tag{7}$$



Фиг. 4.

---

*) См. томъ I, выпускъ II—стр. 67 и выпускъ I—№ 48. Принятыя раньше обозначенія σ_1 и σ_2 замѣнены здѣсь новыми σ_u и σ_o.

такъ какъ для $v = o$ напряженіе $\sigma = \frac{N}{F}$; въ тоже время первоначальное разстояніе между обоими сѣченіями для $v = + e_u$ и $v = - e_o$ измѣняется соотвѣтственно на величину:

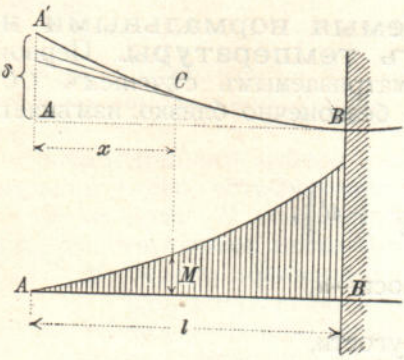
$$(8)\qquad \left\{ \begin{aligned} \Delta dx_u &= dx\left(\frac{N}{EF} + \frac{Me_u}{EJ} + \varepsilon t_u\right) \\ \Delta dx_o &= dx\left(\frac{N}{EF} - \frac{Me_o}{EJ} + \varepsilon t_o\right). \end{aligned} \right.$$

Если высота сѣченія $= h$, то уголъ $d\omega$, на который поворачиваются оба сѣченія CC и $C'C'$ относительно другъ друга, составляетъ

$$d\omega = \frac{\Delta dx_u - \Delta dx_o}{h} \text{ т. е.}$$

$$(9)\qquad d\omega = \left(\frac{M}{EJ} + \varepsilon\,\frac{t_u - t_o}{h}\right) dx.$$

Очевидно $d\omega$ представляетъ также уголъ смежности упругой линіи стержня, т. е. уголъ, образуемый двумя смежными касательными къ упругой линіи. Возьмемъ, напр., стержень AB первоначально горизонтальный, закрѣпленный неподвижно однимъ своимъ концомъ B; пусть стержень отъ дѣйствія какой нибудь нагрузки приметъ форму $A'CB$. Пусть площадь моментовъ будетъ задана (заштрихована на фиг. 5); требуется найти прогибъ δ свободнаго конца. Двѣ касательныя, проведенныя къ упругой линіи въ точкахъ x и $x + dx$, отсѣкаютъ на прямой AA' отрѣзокъ



Фиг. 5.

$$x d\omega = x\left(\frac{M}{EJ} + \varepsilon\,\frac{t_u - t_o}{h}\right) dx,$$

поэтому получаемъ

$$(10)\qquad \delta = \int_o^l x d\omega = \int_o^l \frac{Mxdx}{EJ} + \int_o^l \frac{\varepsilon(t_u - t_o)}{h}\, xdx$$

а для случая постоянныхъ значеній E, J, ε, h, t_u, t_o:

$$(11)\qquad \left\{ \begin{aligned} \delta &= \frac{1}{EJ}\int_o^l Mxdx = \varepsilon\,(t_u - t_o)\,\frac{l^2}{2h}\text{, т. е.} \\ \delta &= \frac{\mathfrak{S}_M}{EJ} + \varepsilon\,(t_u - t_o)\,\frac{l^2}{2h}, \end{aligned} \right.$$

гдѣ $\mathfrak{S}_м$ означаетъ статическій моментъ площади моментовъ, взятый относительно вертикали точки A.

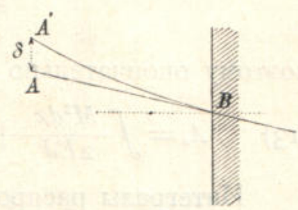
Когда при одинаковомъ всюду h *) величина J мѣняется, то можно написать такъ:

$$\delta = \frac{1}{EJ_c}\int_0^l M\frac{J_c}{J}xdx + \varepsilon(t_н - t_o)\frac{l^2}{2h},$$

гдѣ подъ J_c подразумѣвается произвольный, но постоянный по величинѣ моментъ инерціи; умножимъ затѣмъ ординаты M кривой моментовъ на соотвѣтствующія значенія $J_c : J$ и опредѣлимъ статическій моментъ $\mathfrak{S}'_м$ полученныхъ такимъ образомъ *искаженныхъ площадей моментовъ*, причемъ статическій моментъ берется относительно вертикали, проходящей черезъ A. Тогда будемъ имѣть:

$$\delta = \frac{\mathfrak{S}'_м}{EJ_c} + \varepsilon(t_н - t_o)\frac{l^2}{2h}. \tag{12}$$

Если стержень закрѣпленъ въ точкѣ B не горизонтально, а подъ весьма малымъ угломъ, фиг. 6, то уравненія 11 и 12 можно примѣнить также и для вертикально измѣреннаго разстоянія $AA' = \delta$, потому что это разстояніе отличается отъ прогиба по направленію, перпендикулярному къ оси стержня, только на весьма малую величину высшаго порядка.



Фиг. 6.

3. Работа деформаціи отъ нормальныхъ напряженій. Съ цѣлью показать примѣненіе предложеній Кастильяно, описанныхъ во введеніи (выпускъ VI), вычислимъ еще работу деформаціи A, а также выраженіе

$$A_i = A + \int \sigma\varepsilon t dV = A + \int\int \sigma\varepsilon t dx dF.$$

Вліяніе количества σ на A опредѣляется изъ формулы:

$$A = \int\frac{\sigma^2 dV}{2E} = \int\int\frac{\sigma^2 dx dF}{2E}.$$

Сначала проинтегрируемъ по сѣченію, а затѣмъ по длинѣ оси стержня и тогда, принимая во вниманіе формулу

$$\sigma = \frac{Mv}{J} + \frac{N}{F}$$

---

*) При примѣненіи вышеприведенныхъ формулъ къ сплошнымъ балкамъ подъ h слѣдуетъ понимать всегда постоянную высоту вертикальнаго ребра. Измѣняемость J получается при измѣненіи сѣченія для поясныхъ листовъ.

и условія равновѣсія

$$\int \sigma dF = N, \int \sigma v dF = M.$$

получимъ слѣдующее значеніе для работы деформаціи:

$$A = \int \frac{dx}{2E} \int \sigma^2 dE = \int \frac{dx}{2E} \left[\frac{M}{J} \int \sigma v dF + \frac{N}{F} \int \sigma dF \right]$$

$$A = \int \frac{M^2 dx}{2EJ} + \int \frac{N^2 dx}{2EF},$$

а затѣмъ, такъ какъ $t = t_s + \frac{t_u - t_o}{h} v$,

найдемъ:

$$\int \int \sigma \varepsilon t dx dF = \int \varepsilon dx \int \sigma \left(t_s + \frac{t_u - t_o}{h} v \right) dF$$

$$= \int \varepsilon t_s N dx + \int \varepsilon (t_u - t_o) \frac{M}{h} dx,$$

поэтому окончательно получится:

(13) $$A_i = \int \frac{M^2 dx}{2EJ} + \int \frac{N^2 dx}{2EF} + \int \varepsilon (t_u - t_o) \frac{M}{h} dx + \int \varepsilon t_s N dx.$$

Интегралы распространены на всю длину стержня.

Кромѣ деформацій Δdx и $d\omega$ напряженія σ и t вызываютъ еще измѣненія въ размѣрахъ поперечнаго сѣченія; впрочемъ въ дальнѣйшихъ изслѣдованіяхъ этими измѣненіями можно пренебречь. Попытка разрѣшенія этого вопроса описана въ сочиненіи автора: *Die neueren Methoden der Festigkeitslehre*, Leipzig, Baumgärtners Buchhandlung, 1886, § 22 *).

4. Перерѣзывающія **) напряженія. Въ задачахъ, разсматриваемыхъ въ настоящей книгѣ, достаточно ограничиться изслѣдованіемъ перерѣзывающихъ напряженій τ только для случая сѣченій, симметричныхъ относительно оси v. Если ширина поперечнаго сѣченія $2z$ представляется непрерывною функціею количества v (фиг. 7), то направленіе перерѣзывающаго напряженія τ, вызываемаго перерѣзывающей силой Q въ какой либо точкѣ сѣченія D, пересѣкаетъ ось v въ точкѣ H; эта точка получается при проведеніи касательной BH къ внѣшнему контуру сѣченія въ точкѣ B, лежащей на хордѣ AB, которая проведена черезъ D параллельно оси—u ***). Разлагая τ на составляющія напряженія τ_v—перпендикулярное къ оси—v и τ_u—перпендикулярное къ оси—u, найдемъ

(14) $$\tau_u = \frac{QS}{2zJ}; \tau_v = \tau_u \frac{u}{z} \operatorname{tg} \varphi,$$

*) Также второе изданіе 1893 г. (въ русскомъ переводѣ инж. Н. Митинскаго: Новые методы строительной механики, проф. Мюллеръ-Бреслау, Спб. 1898, Щепанскій).

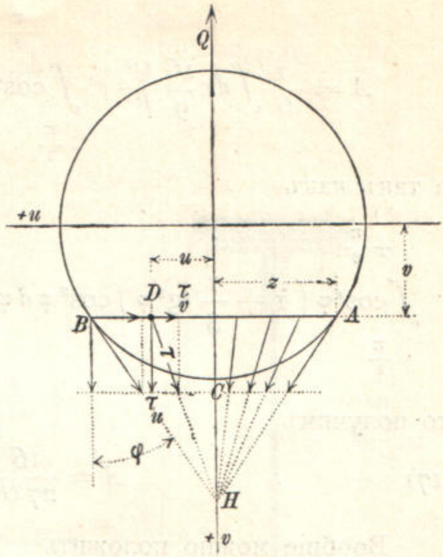
**) Или скалывающія.

***) См. также томъ I, выпускъ I, № 52.

гдѣ S—статическій моментъ относительно оси—u одной изъ частей площади поперечнаго сѣченія, раздѣляемаго хордой AB (напр. части ABC),

J—моментъ инерціи всей площади поперечнаго сѣченія относительно оси—u и

φ—уголъ, образуемый касательной въ точкѣ B съ осью—v.



Фиг. 7.

5. Деформаціи отъ перерѣзывающихъ напряженій. Опредѣлимъ вліяніе напряженій τ на деформацію стержня съ помощью теоремы Кастильяно о производной работы деформаціи A, причемъ сначала вычислимъ ту часть A, которая зависитъ отъ перерѣзывающихъ напряженій. Эта величина для принимаемаго нами случая постояннаго коэффиціента поперечной упругости G опредѣлится по слѣдующей формулѣ (см. № 28, выпускъ VI, уравн. 50):

$$A = \frac{1}{2G}\int (\tau^2{}_u + \tau^2{}_v)\, dV = \frac{1}{2G}\int dx \int\int (\tau^2{}_u + \tau^2{}_v)\, du dv$$

$$= \frac{1}{2G}\int dx \int\int \tau^2{}_u \left(1 + \frac{u^2}{z^2}\operatorname{tg}^2\varphi\right) du dv$$

$$= \frac{1}{2G}\int dx \int \tau^2{}_u dv \int_{-z}^{+z} \left(1 + \frac{u^2}{z^2}\operatorname{tg}^2\varphi\right) du \text{ т. е.}$$

$$(15) \qquad A = \frac{1}{G}\int dx \int \tau^2{}_u \left(1 + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^2\varphi\right) z dv.$$

Напр. для **прямоугольнаго сѣченія** при ширинѣ b и высотѣ $h = 2e$

$$\tau_u = \frac{3}{2}\frac{Q}{F}\left(1 - \frac{v^2}{e^2}\right),\ z = \frac{1}{2}b,\ \varphi = 0.$$

Затѣмъ получимъ:

$$A = \frac{1}{G}\int dx \frac{9}{4}\frac{Q^2}{F^2}\frac{b}{2}\int_{-e}^{+e}\left(1 - \frac{v^2}{e^2}\right)^2 dv,$$

а такъ какъ $\displaystyle\int_{-e}^{+e}\left(1 - \frac{v^2}{e^2}\right)^2 dv = \frac{16}{15}e = \frac{8F}{15b}$, то

$$(16) \qquad A = \frac{3}{5G}\int \frac{Q^2 dx}{F}.$$

Для **круга** съ радіусомъ e

$$\tau_u = \frac{4}{3}\frac{Q}{F}\cos^2\varphi,\ z = e\cos\varphi,\ v = e\sin\varphi$$

$$A = \frac{1}{G}\int dx \frac{16}{9}\frac{Q^2}{F^2}e^2 \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^4\varphi\left(1 + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^2\varphi\right)\cos^2\varphi\, d\varphi,$$

а такъ какъ

$$\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^4\varphi\left(1 + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^2\varphi\right)\cos^2\varphi\, d\varphi = \frac{2}{3}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}(2\cos^6\varphi + \cos^4\varphi)\,d\varphi = \frac{\pi}{3},$$

то получимъ

(17) $$A = \frac{16}{27\,G}\int\frac{Q^2dx}{F}.$$

Вообще можно положить

(18) $$A = \frac{\varkappa}{2G}\int\frac{Q^2dx}{F},$$

гдѣ $\varkappa$ означаетъ число, зависящее отъ формы поперечнаго сѣченія. Для прямоугольника $\varkappa = \frac{6}{5}$, для круга $\varkappa = \frac{32}{27}$.

Мы уже раньше указывали (№ 52, I томъ, I выпускъ) на то, что уравненія (14) не примѣнимы въ тѣхъ случаяхъ, когда количества z и φ, зависящія отъ v, не имѣютъ мѣстами непрерывности; подобный случай имѣетъ мѣсто въ одномъ изъ важнѣйшихъ поперечныхъ сѣченій, а именно въ поперечномъ сѣченіи *сплошной клепанной балки.* Отбросивъ всѣ тонкости расчета, мы можемъ принять, что перерѣзывающая сила Q распредѣляется только по сѣченію F_s вертикальнаго листа и притомъ равномѣрно.

Тогда при $\tau_u = \frac{Q}{F_s}$, $\tau_v = 0$ получимъ:

(19) $$A = \frac{1}{2G}\int\frac{Q^2dx}{F_s} = \frac{1}{2G}\int\frac{\varkappa\, Q^2dx}{F};$$

коэффиціентъ $\varkappa$ для поперечнаго сѣченія балки равняется $\varkappa = F : F_s$; вообще для различныхъ сѣченій той же балки этотъ коэффиціентъ не одинъ и тотъ же.

Пусть S_g и J_g означаютъ соотвѣтственно статическій моментъ и моментъ инерціи относительно оси—u площади сѣченія пояса, состоящаго изъ уголковъ и горизонтальныхъ листовъ; пусть h_1 высота и δ толщина вертикальной стѣнки; тогда въ формулу

$$\tau_u = \frac{QS}{2zJ}$$

надо подставить:

$$S = S_g + {}^1/_8\,\delta\,h_1^2 - {}^1/_2\,\delta v^2 = S_c - {}^1/_2\,\delta v^2 \text{ и } 2z = \delta;$$

пренебрегая перерѣзывающими напряженіями въ поясныхъ листахъ, получимъ:

$$A = \frac{1}{2G}\int dx\,\frac{Q^2}{\delta^2 J^2}\int_{-\frac{h_1}{2}}^{+\frac{h_1}{2}}\left(S_c - \frac{1}{2}\,\delta v^2\right)^2 \delta\cdot dv = \frac{1}{2G}\int\frac{\varkappa Q^2 dx}{F},$$

откуда найдемъ:

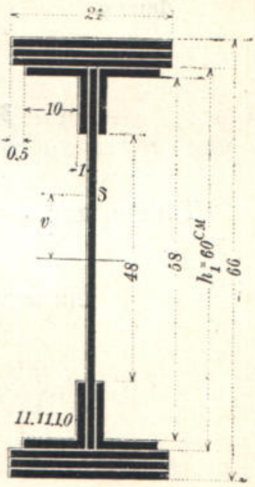
$$\varkappa = \frac{F}{J^2\delta}\int_{-\frac{h_1}{2}}^{+\frac{h_1}{2}}\left(S_c - \frac{1}{2}\,\delta v^2\right)^2 dv$$

$$= \frac{Fh_1}{J^2\delta}\left[S^2_c - \frac{\delta S_c h_1^2}{12} + \frac{\delta^2 h_1^4}{320}\right]$$

$$= \frac{Fh_1}{J^2\delta}\left[\left(S_g + \frac{\delta h_1^2}{12}\right)^2 + \frac{\delta^2 h_1^4}{720}\right].$$

Членомъ $\frac{\delta^2 h_1^4}{720}$ въ сравненіи съ членомъ $\left(S_g + \frac{\delta h_1^2}{12}\right)^2$ можно всегда пренебречь; если написать, что $h_1 : \delta = h_1^2 : F_s$, гдѣ F_s означаетъ площадь поперечнаго сѣченія вертикальнаго листа, то окончательно получимъ

$$\varkappa = \frac{F}{F_s}\left[\frac{h_1\left(S_g + \frac{1}{12}\,\delta h_1^2\right)}{J}\right]^2$$



Фиг. 8.

Для сѣченія, показаннаго на фиг. 8, имѣемъ, напримѣръ:

$$S = \frac{1}{8}\left[24\cdot 66^2 - 2\cdot 0{,}5\cdot 60^2 - 2\cdot 10\cdot 58^2 - 2\cdot 1{,}0\cdot 48^2 - 1{,}0\cdot 60^2\right] = 3182,$$

$$J = \frac{1}{12}\left[24\cdot 66^3 - 2\cdot 0.5\cdot 60^3 - 2\cdot 10\cdot 58^3 - 2\cdot 1{,}0\cdot 48^3\right] = 213373,$$

$\delta = 1{,}0$, $h_1 = 60$, а затѣмъ:

$$\varkappa = \frac{F}{F_s}\left[\frac{60\,(3182 + 300)}{213373}\right]^2 = 0{,}96\,\frac{F}{F_s}.$$

Отбросивъ поясные листы, получимъ:

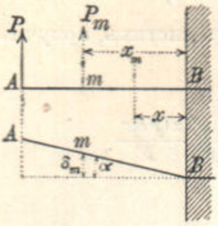
$$S_g = 3182 - \frac{24}{8}\,(66^2 - 60^2) = 914$$

$$J_g = 213373 - \frac{24}{12}\,(66^3 - 60^3) = 70002$$

$$\varkappa = \frac{F}{F_s}\left[\frac{60\,(914 + 300)}{70002}\right]^2 = 1{,}07\,\frac{F}{F_s}.$$

Принимая во вниманіе не совсѣмъ точныя положенія современной теоріи перерѣзывающихъ напряженій, мы съ достаточною точностью можемъ принять слѣдующее значеніе для $\varkappa$, а именно $\varkappa = 1{,}0\,\frac{F}{F_s}$.

Разсмотримъ теперь горизонтальный стержень AB съ постояннымъ поперечнымъ сѣченіемъ, фиг. 9, одинъ конецъ B котораго закрѣпленъ, а на другой конецъ дѣйствуетъ сосредоточенный грузъ P, перпендикулярный къ оси стержня. Опредѣлимъ то перемѣщеніе δ_m точки m, взятой по оси стержня на разстояніи x_m отъ B, которое зависитъ исключительно отъ перерѣзывающихъ напряженій.



Фиг. 9.

Приложимъ въ точкѣ m по направленію δ_m грузъ P_m, которой надо впослѣдствіи приравнять нулю, тогда получимъ

$$\delta_m = \frac{\partial A}{\partial P_m} = \frac{\varkappa}{GF}\int\limits_0^l Q\frac{\partial Q}{\partial P_m}\,dx.$$

Теперь для $x < x_m : Q = P + P_m, \dfrac{\partial Q}{\partial P_m} = 1$

для $x > x_m : Q = P, \dfrac{\partial Q}{\partial P_m} = 0$, а потому

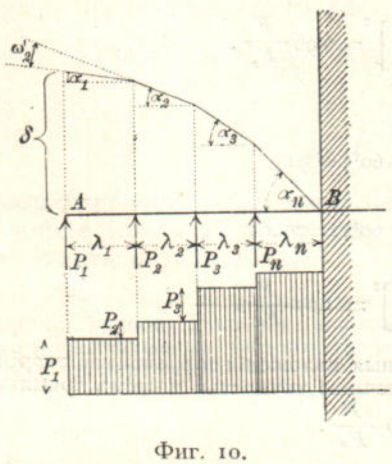
$$\delta_m = \frac{\varkappa}{GF}\int\limits_0^{x_m} P dx \text{ т. е.}$$

(20) $$\delta_m = \frac{\varkappa P x_m}{GF}.$$

Ось стержня остается поэтому прямолинейной; уголъ поворота ея равняется

(21) $$\alpha = \frac{\delta_m}{x_m} = \frac{\varkappa P}{GF}.$$

Точка m получаетъ перемѣщеніе перпендикулярное къ оси стержня и ни въ коемъ случаѣ не по направленію оси стержня; это слѣдуетъ изъ того, что сила P_m, совпадающая съ осью стержня, не оказываетъ никакого вліянія на Q, а тогда получимъ, что $\dfrac{\partial Q}{\partial P} = 0$ и $\delta_m = 0$.



Фиг. 10.

Если для случая нагрузки, представленной на фиг. 10 (свободная балка AB подъ дѣйствіемъ сосредоточенныхъ грузовъ $P_1, P_2, \ldots P_n$), принять во вниманіе только перерѣзывающія напряженія τ, то для упругой линіи стержня получимъ ломанную линію. Пусть частямъ стержня $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ соотвѣтствуютъ значенія

$\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots$ и $F_1, F_2, \ldots$, тогда углы наклоненія сторонъ ломанной линіи будутъ таковы:

$$\alpha_1 = \frac{\varkappa_1 Q_1}{GF_1},\ \alpha_2 = \frac{\varkappa_2 Q_2}{GF_2},\ \alpha_3 = \frac{\varkappa_3 Q_3}{GF_3} \text{ и т. д.;}$$

$$\text{гдѣ } Q_1 = P_1,\ Q_2 = P_1 + P_2,\ Q_3 = P_1 + P_2 + P_3 \text{ и т. д.}$$

Уголъ ω'_2, образуемый двумя смежными сторонами многоугольника, лежащими влѣво и вправо отъ P_2, равняется

$$\omega'_2 = \frac{1}{G}\left(\frac{\varkappa_2 Q_2}{F_2} - \frac{\varkappa_1 Q_1}{F_1}\right). \tag{22}$$

При одинаковомъ повсюду сѣченіи ($F_1 = F_2 = F_3 = \ldots = F$ и $\varkappa_1 = \varkappa_2 = \varkappa_3 = \ldots = \varkappa$), уравн. (22) обращается въ слѣдующее

$$\omega'_2 = \frac{\varkappa}{GF} P_2, \tag{23}$$

поэтому для ω'_2 получается значеніе, пропорціональное грузу P_2.

Перемѣщеніе δ конца стержня A равняется

$$\delta = \alpha_1\lambda_1 + \alpha_2\lambda_2 + \ldots = \Sigma\alpha\lambda = \Sigma\,\frac{Q\varkappa\lambda}{GF}, \tag{24}$$

а при одинаковомъ повсюду сѣченіи:

$$\delta = \frac{\varkappa}{GF}\,\Sigma Q\lambda = \frac{\varkappa \mathfrak{F}_Q}{GF} \tag{25}$$

гдѣ $\mathfrak{F}_Q$ означаетъ величину площади перерѣзывающихъ силъ, заштрихованной для наглядности на фиг. 10.

Особенный видъ упругой линіи, состоящей изъ прямолинейныхъ участковъ, получается, конечно, на основаніи неточнаго опредѣленія перерѣзывающихъ напряженій вблизи грузовъ P; допущеніе ступенчатаго измѣненія перерѣзывающихъ напряженій есть только вспомогательное средство, предложенное въ виду невозможности точнѣе опредѣлить состояніе напряженій въ мѣстахъ дѣйствія грузовъ P.

Когда нагрузка непрерывна, то и упругая линія также непрерывна. Вмѣсто P здѣсь входитъ pdx, гдѣ p означаетъ ординату нагрузки. Тогда при одинаковомъ повсюду поперечномъ сѣченіи уравненіе 23 обращается въ слѣдующее:

$$d\omega' = \frac{\varkappa p dx}{GF}; \tag{26}$$

при перемѣнныхъ же сѣченіяхъ изъ уравн. (22) получаемъ:

$$d\omega' = \frac{1}{G}\,\frac{d\left(\frac{\varkappa Q}{F}\right)}{dx}\,dx = \frac{1}{G}\left(\frac{\varkappa}{F}\,p + Q\,\frac{d\left(\frac{\varkappa}{F}\right)}{dx}\right)dx. \tag{27}$$

Для послѣдняго случая слѣдуетъ всетаки замѣнить непрерывную нагрузку грузами сосредоточенными, лежащими близко одинъ отъ другаго, и примѣнить уравненіе 22. Для отдѣльныхъ частей стержня слѣдуетъ принять постоянныя среднія значенія $\varkappa$ и F.

Напомнимъ здѣсь, что между коэффиціентами упругости G и E существуетъ такая зависимость

$$(28)\qquad G = \frac{mE}{2(1+m)},$$

глѣ m означаетъ коэффиціентъ поперечнаго расширенія. Для сварочнаго и литаго желѣза $m = 3$ до 4, поэтому

$$(29)\qquad G = \frac{3}{8}\,E \text{ до } \frac{2}{5}\,E.$$

---

§ 2.

Линія прогибовъ *).

6. Линія прогибовъ жесткаго стержня представляетъ собою весьма плоскую кривую, поэтому отрѣзокъ, который отсѣкается двумя смежными касательными на вертикали, проведенной на разстояніи 1 отъ точки касанія, можетъ быть приравненъ $1 \cdot d\omega$, гдѣ $d\omega$ означаетъ уголъ смежности, фиг. 11. Но отсюда слѣдуетъ, что *линію прогибовъ можно разсматривать какъ веревочную кривую для вертикальныхъ грузовъ*; полюсное разстояніе надо взять $=1$, или лучше $=1:\nu$ съ тѣмъ, чтобы получить прогибы въ ν—разъ большемъ масштабѣ.

Не обращая пока вниманія на вліяніе перерѣзывающихъ напряженій, мы получимъ изъ уравн. 9, стр. 8:

$$d\omega = \left(\frac{M}{EJ} + \varepsilon\frac{t_u - t_o}{h}\right)dx,$$

и тогда линія прогибовъ будетъ веревочной кривой для непрерывной нагрузки, которая при абсциссѣ x имѣетъ высоту

$$(1)\qquad z = \frac{M}{EJ} + \varepsilon\frac{t_u - t_o}{h}.$$

---

*) Въ примѣненіи къ стержнямъ, брусьямъ, эта линія прогибовъ называется также *упругою линіею*, *изогнутой осью*. Такъ какъ для насъ имѣютъ интересъ въ большинствѣ случаевъ вертикальныя перемѣщенія не только въ брусьяхъ, но и въ рѣшетчатыхъ фермахъ, то названіе линіи прогибовъ (Biegungslinie) будетъ нѣсколько общнѣе.

Прим. перевод.

Когда сѣченіе балки постоянно, то слѣдуетъ ввести высоту нагрузки

$$z = M + \varepsilon EJ \frac{t_u - t_o}{h}. \tag{2}$$

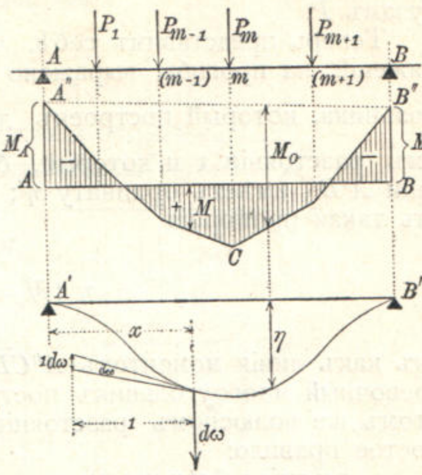
а веревочную кривую надо тогда построить при полюсномъ разстояніи EJ (или соотвѣтственно $EJ:\nu$).

Если $t_u - t_o = 0$, то получимъ весьма простое соотношеніе $z = M$, т. е. площадь моментовъ будетъ грузовою площадью для искомой веревочной кривой.

При перемѣнныхъ сѣченіяхъ упругая линія строится обыкновенно какъ веревочная кривая для нагрузки

$$z = M\frac{J_c}{J} + \varepsilon EJ_c \frac{t_u - t_o}{h}, \tag{3}$$

гдѣ J_c означаетъ произвольный но постоянный моментъ инерціи. Полюсное разстояніе необходимо взять тогда равнымъ $= EJ_c$ (или соотвѣтственно $EJ_c:\nu$).



Фиг. 11.

Когда веревочная кривая построена, то для опредѣленія прогибовъ η необходимо привести еще два условія, служащія для проведенія замыкающей линіи $A'B'$. На фиг. 11 представлена одна панель балки, лежащей на нѣсколькихъ опорахъ; опорныя точки считаются неподвижными въ вертикальномъ направленіи; замыкающая линія опредѣляется условіями $\eta_A = 0$, $\eta_B = 0$.

7. Если требуется принять во вниманіе также вліяніе перерѣзывающихъ напряженій, то къ нагрузкѣ z (которая можетъ быть опредѣлена по уравн. 3) прибавляются въ точкахъ приложенія m грузовъ P_m еще сосредоточенные грузы, опредѣляемые по уравн. 22, стр. 15, а именно

$$w_m = \frac{EJ_c}{G}\left(\frac{\varkappa_{m+1}Q_{m+1}}{F_{m+1}} - \frac{\varkappa_m Q_m}{F_m}\right)^{*)}; \tag{4}$$

при этомъ предполагалось, что непрерывная нагрузка, дѣйствующая на балку, замѣнена рядомъ сосредоточенныхъ грузовъ. Величины $\varkappa_m$, F_m представляютъ среднія значенія для протяженія $(m-1)-m$.

Когда отношеніе $\varkappa : F$ одинаково для всѣхъ поперечныхъ сѣченій балки—(этотъ случай имѣетъ мѣсто не только при постоянныхъ поперечныхъ сѣченіяхъ, но и при одинаковомъ поперечномъ

*) Здѣсь необходимо ввести множитель EJ_c, потому что при примѣненіи уравненія 3 полюсное разстояніе для линіи прогибовъ было взято $= EJ_c$.

сѣченіи F_s въ вертикальныхъ листахъ сплошныхъ балокъ, потому что въ нихъ мы имѣемъ $\varkappa : F = 1 : F_s$, стр. 13) — тогда получимъ

$$(5) \qquad w_m = \frac{\varkappa E J_c}{GF} P_m,$$

а отсюда заключаемъ, что добавочные грузы w пропорціональны грузамъ P.

Теперь представимъ себѣ, что вліяніе перерѣзывающихъ напряженій на прогибы выражено при помощи веревочнаго многоугольника, который построенъ для грузовъ $w = \frac{\varkappa P}{GF}$ при полюсномъ разстояніи 1 и который, будучи отнесенъ къ замыкающей линіи $A'B'$, имѣетъ ординату η'; тогда очевидно должна существовать такая пропорція

$$\eta' : M_o = \frac{\varkappa P}{GF} : P,$$

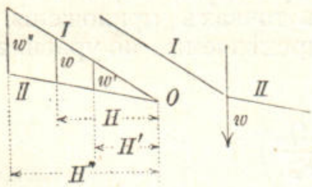
такъ какъ линія моментовъ $A''CB''$ (фиг. 11) представляетъ собою веревочный многоугольникъ, построенный для грузовъ P при одномъ и томъ же полюсномъ разстояніи 1; а отсюда получается весьма простое правило:

вліяніе перерѣзывающихъ напряженій на прогибъ выражается формулой

$$(6) \qquad \eta' = \frac{\varkappa M_o}{GF}.$$

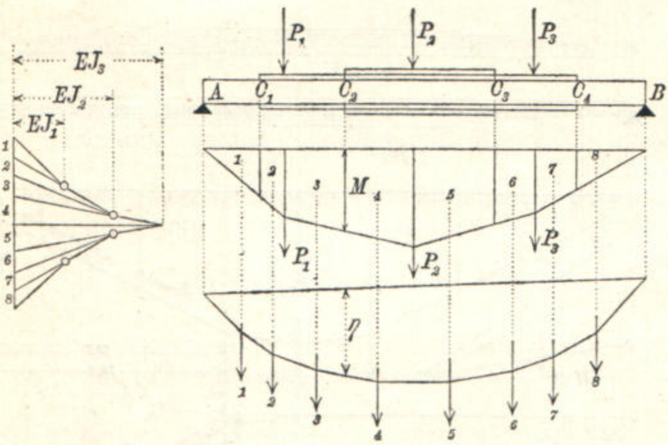
Обыкновенно достаточно бываетъ изслѣдовать съ помощью предъидущаго выраженія вліяніе перерѣзывающихъ напряженій на какую нибудь ординату линіи прогибовъ (вблизи η_{max}).

8. Когда прогибы сплошной балки съ перемѣннымъ поперечнымъ сѣченіемъ построены для ряда различныхъ нагрузокъ, то слѣдующее измѣненіе въ ранѣе предложенномъ пріемѣ имѣетъ большія преимущества. Основывается это на той теоремѣ, что каждый отдѣльный грузъ w въ веревочномъ многоугольникѣ можно замѣнить меньшимъ w' или большимъ w'', если только въ томъ же отношеніи уменьшено или увеличено полюсное разстояніе H. См. фиг. 12, гдѣ I и II представляютъ два смежныхъ бока одного и того же веревочнаго многоугольника.



Фиг. 12.

Разсмотримъ теперь ферму на фиг. 13; пусть поперечныя сѣченія ея мѣняются скачками, причемъ на протяженіи AC_1, C_1C_2, C_2C_3, ... моменты инерціи будутъ J_1, J_2, J_3, ... Требуется опредѣлить только вліяніе моментовъ M на прогибы. Примемъ площадь моментовъ за грузовую площадь, которую раздѣлимъ на участки такъ, чтобъ границами этихъ участковъ были вертикальныя прямыя, проходящія черезъ точки C_1, C_2, . . . Примемъ величины площадей этихъ участковъ за грузы и построимъ для нихъ рядъ связанныхъ между собою веревочныхъ многоугольниковъ, полюсныя разстоянія для которыхъ равны послѣдовательно EJ_1, EJ_2, EJ_3, ... и которые соединяютъ вѣса участковъ, соотвѣтствующихъ протяженіямъ AC_1, C_1C_2, C_2C_3 . . . ; тогда мы получимъ многоугольникъ, описанный около упругой линіи; этотъ многоугольникъ называется часто веревочнымъ многоугольникомъ съ перемѣннымъ полюснымъ разстояніемъ.



Фиг. 13.

Если нагрузка балки мѣняется, то явится вновь только необходимость въ построеніи линій моментовъ, тогда какъ по способу, описанному въ № 7, требуется еще новое вычисленіе искаженной линіи моментовъ $\left(M\frac{J_c}{J}\right)$. О вліяніи перерѣзывающихъ напряженій судятъ по уравн. 6; въ данномъ случаѣ $M_o = M$.

Численные примѣры.

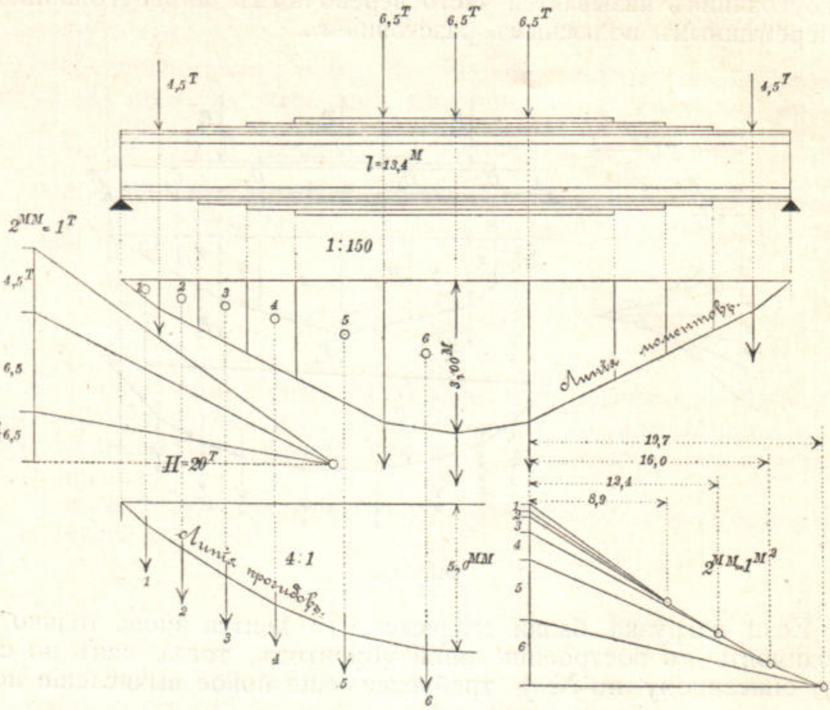
a. Прогибъ моста со сплошными балками. На фиг. 14 представлена главная ферма (сплошная балка) для моста въ одинъ путь; она состоитъ изъ вертикальнаго листа 1300 · 10 мм., изъ уголковъ 100 · 100 · 12 мм. и изъ поясныхъ листовъ 245 · 10 мм., фиг. 15. Моментъ инерціи площади поперечнаго сѣченія, безъ вычета на ослабленіе заклепками, составляетъ:

безъ листовъ . . .	$J_0 =$	531 500 см⁴.
съ 1 листомъ . .	$J_1 =$	741 700 „
„ 2 листами . .	$J_2 =$	958 400 „
„ 3 „ .	$J_3 =$	1 181 700 „

На ферму дѣйствуютъ давленія отъ пяти колесъ по 6,5 и 4,5 тоннъ. Требуется опредѣлить вліяніе этихъ давленій на прогибы.

Построимъ сначала линію моментовъ. Полюсное разстояніе взято $H = 20$ т., наибольшая ордината равняется 3,00 м.; такимъ образомъ получаемъ

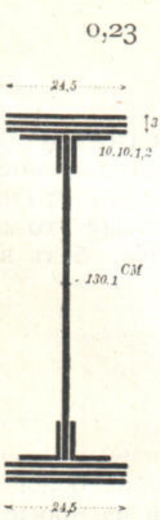
$$_{max}M = 20 \cdot 3{,}00 = 60 \text{ т. м.} = 6\,000 \text{ т. см.}$$



Фиг. 14.

Раздѣлимъ теперь половину площади моментовъ на 6 частей, которыя будутъ соотвѣтственно равны

0,23 0,61 1,06 1,64 4,19 4,03 м².



Фиг. 15.

Полюсныя разстоянія для вѣсовъ этихъ участковъ надо вычислить по формулѣ

$$\mathfrak{H} = \frac{EJ}{H\nu},$$

потому что ординаты линіи моментовъ равны величинамъ моментовъ, раздѣленнымъ на H. Масштабъ искаженія $\nu : 1$ равняется $150 \cdot 4 : 1 = 600 : 1$, такъ какъ ферма вычерчена въ масштабѣ $1 : 150$, а линія прогибовъ въ масштабѣ $4 : 1$. Поэтому при $E = 2\,000\,000$ к/см². $= 2\,000$ т/см². получаемъ:

$$\mathfrak{H} = \frac{2\,000\ J}{20 \cdot 600} = \frac{1}{6} J \text{ см}^2.,$$

откуда для вѣсовъ участковъ 1 и 2:

$$\mathfrak{H} = \frac{1}{6} \cdot 531\,500 = 88\,583 \text{ см}^2. = 8{,}9 \text{ м}^2.,$$

для участка 3: $\mathfrak{H} = \frac{1}{6} \cdot 74{,}17 = 12{,}4$ м^2.

для участка 4: $\mathfrak{H} = \frac{1}{6} \cdot 95{,}84 = 16{,}0$ м^2.

для участковъ 5 и 6: $\mathfrak{H} = \frac{1}{6} \cdot 118{,}17 = 19{,}7$ м^2.

Въ виду симметричности нагрузки линія прогибовъ построена только для половины балки. Наибольшій прогибъ получается въ 5,00 мм.

Отъ вліянія перерѣзывающихъ напряженій это значеніе увеличивается на величину

$$\eta = \frac{\varkappa M}{GF} = \frac{5}{2} \frac{M}{EF_s}.$$

Площадь поперечнаго сѣченія вертикальнаго листа составляетъ $F_s = 130$ см^2., такимъ образомъ получимъ

$$\eta = \frac{5}{2} \frac{6\,000}{2\,000 \cdot 130} = 0{,}06 \text{ см.} = 0{,}6 \text{ мм.}$$

Такимъ образомъ вліяніе перерѣзывающихъ напряженій составляетъ 12% отъ прежде найденнаго значенія.

Въ нижеслѣдующемъ изслѣдованіи выведемъ простую и достаточно вѣрную приближенную формулу для вычисленія наибольшаго прогиба.

Для равномѣрно нагруженной балки $M = \frac{pl}{2} x - \frac{px^2}{2}$ и при постоянномъ J, не принимая во вниманіе вліянія перерѣзывающихъ напряженій, найдемъ

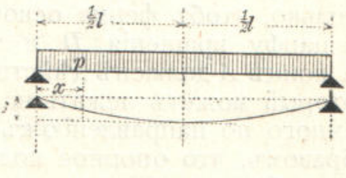
(I) $$\delta = \frac{1}{EJ} \int_0^{1/2\, l} \left(\frac{pl}{2} x - \frac{px^2}{2} \right) x dx = \frac{5\, pl^4}{384 EJ} = \frac{5}{48} \frac{M_{max} l^2}{EJ}.$$

Если поперечное сѣченіе при постоянной высотѣ, взято перемѣннымъ и подобрано такимъ образомъ, что напряженіе σ всюду одинаково, то отношеніе $M:J$ принимаетъ постоянное значеніе и тогда получаемъ

(II) $$\delta = \frac{M}{EJ} \int_0^{1/2\, l} x dx = \frac{6\, M_{max} l^2}{48\, EJ},$$

гдѣ J означаетъ моментъ инерціи въ наиболѣе напряженномъ поперечномъ сѣченіи.

Въ сплошныхъ балкахъ, поперечныя сѣченія которыхъ мѣняются скачками, величина δ заключается между предѣлами I и II и лежитъ ближе къ предѣлу I. Замѣнимъ дробь $\frac{5}{48}$ дробью $\frac{5{,}4}{48} = \frac{9}{80} =$ около $\frac{1}{9}$ и примемъ во вниманіе вліяніе перерѣзывающихъ силъ, тогда получимъ



Фиг. 16.

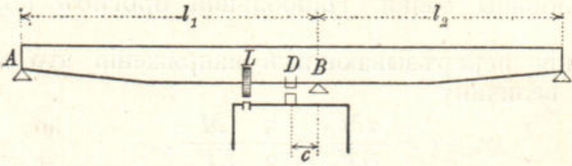
$$\delta = \frac{M_{max} l^2}{9 EJ} + \frac{5}{2} \frac{M_{max}}{EF_s},$$

а въ примѣненіи къ данному примѣру

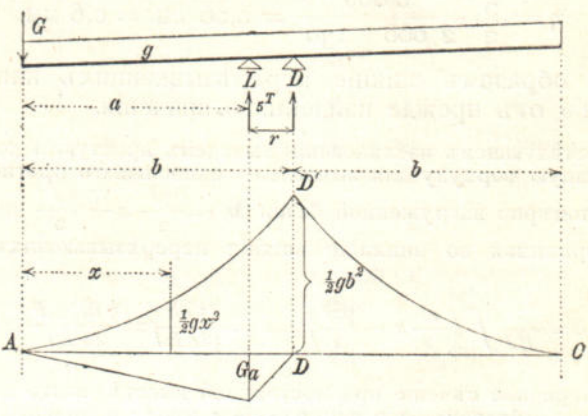
$$\delta = \frac{6\,000 \cdot 1\,340^2}{9 \cdot 2\,000 \cdot 1\,181\,700} + \frac{5}{2} \cdot \frac{6\,000}{2\,000 \cdot 130} = 0{,}56 \text{ см.},$$

что почти вполнѣ согласуется съ результатомъ, полученнымъ раньше. Въ пользу примѣненія приближенной формулы говоритъ еще то обстоятельство, что такъ называемый точный расчетъ основанъ на такихъ предположеніяхъ, которыя не всегда строго выполняются.

b. Прогибъ открытаго поворотнаго моста системы Шведлера. (Листъ чертежей 1). Когда мостъ закрытъ, то каждая изъ главныхъ фермъ лежитъ на опорахъ A, B, C. Въ точкахъ B и C расположены неподвижныя опорныя подушки, въ



Фиг. 17.



Фиг. 18.

точкѣ же A находится подвижная опора, которая можетъ понижаться или совсѣмъ уничтожаться, напр. вращающійся упоръ (Pendel). Для открытія моста необходимо опору A опустить на столько, чтобъ ферма освободилась отъ опоръ B и C и легла бы на цапфу вращенія D и на опорный катокъ L. Противовѣсъ G на концѣ A долженъ дѣйствовать такъ, чтобъ центръ тяжести моста, который можетъ лежать на вертикали надъ точкой D, перемѣстился немного по направленію къ A; это обыкновенно устраивается такимъ образомъ, что опорное колесо получаетъ нагрузку въ 5 тоннъ; поэтому будемъ имѣть

$$G = 5\,\frac{r}{b}.$$

Постоянная нагрузка принимается обыкновенно равномѣрно распредѣленной. Тогда площадь моментовъ для открытаго моста состоитъ изъ двухъ площадей параболъ ADD' и CDD' (фиг. 18) съ высотой $^1/_2 gb^2$ и изъ треугольника, высота котораго Ga. Вершины параболъ лежатъ въ точкахъ A и C.

Мостъ предназначенъ для двухъ желѣзнодорожныхъ путей и имѣетъ двѣ главныхъ фермы. Пусть $a = 13{,}8$ м., $r = 3{,}5$ м., $b = 17{,}3$ м., $l_1 = 18{,}1$ м., $l_2 = 16{,}5$ м., $c = 0{,}8$ м. Размѣры поперечныхъ сѣченій указаны на листѣ чертежей 1; вертикальный листъ имѣетъ размѣры 1400 · 10 мм. до 1640 . 12, уголки 100 · 110 · 13 и 110 · 110 · 14 мм., поясные листы 400 · 13 мм. Постоянная нагрузка составляетъ 1,3 тонн. на метръ пути. Изъ реакціи опорнаго колеса въ 5 тоннъ на каждую ферму приходится 2,5 тон., поэтому противовѣсъ на каждую ферму составляетъ

$$G = 2{,}5 \cdot \frac{3{,}5}{17{,}3} = 0{,}5 \text{ тон.}$$

Затѣмъ получимъ $M_D = \dfrac{gb^2}{2} = 195$ тм. и

$$Ga = 0{,}5 \cdot 13{,}8 = 7 \text{ тм.};$$

площадь моментовъ, соотвѣтствующая этимъ значеніямъ, заштрихована синимъ на листѣ чертежей 1. Эта площадь построена въ масштабѣ 1 мм. = 4,5 тм.; ординаты этой площади необходимо умножить на величину перемѣннаго отношенія $J_c : J$, гдѣ J означаетъ моментъ инерціи площади поперечнаго сѣченія въ данномъ мѣстѣ, а J_c означаетъ величину произвольнаго но постояннаго момента инерціи. Величины J нанесены на чертежѣ по ломанной линіи, заштрихованной чернымъ; величина J колеблется отъ 666 386 см^4. до 3 356 824 см^4. Для J_c выбрано значеніе 2 500 000 см^4. = 0,025 м^4.

По уравн. 3, стр. 17, количество $z = M \dfrac{J_c}{J}$ образуетъ тѣ ординаты нагрузки для цѣпной линіи, которыя зависятъ отъ нормальныхъ напряженій; къ нимъ надо прибавить еще членъ, выражающій вліяніе дѣйствія солнечныхъ лучей на верхній поясъ:

$$z_t = \frac{t_o - t_u}{h} \varepsilon E J_c \text{ *)},$$

причемъ $t_o - t_u$ должно равняться по меньшей мѣрѣ = 10° Cels.; поэтому при принятыхъ величинахъ для высоты вертикальнаго листа h (отъ 1,40 до 1,64 м.), $\varepsilon = 0{,}000\,012$, $E = 20\,000\,000$ т./м.^{2}, т. е. $\varepsilon E = 240$, имѣемъ

$$\text{отъ } z_t = \frac{10}{1{,}40} \cdot 240 \cdot 0{,}025 = 43 \text{ тм.}$$

$$\text{до } z_t = \frac{10}{1{,}64} \cdot 240 \cdot 0{,}025 = 37 \text{ тм.}$$

*) См. формулу 4, стр. 17. Здѣсь требуется перемѣна знаковъ, потому что теперь, въ противоположность предыдущимъ условіямъ, мы считаемъ положительными тѣ моменты, которые вызываютъ растяженія въ верхнихъ частяхъ поперечныхъ сѣченій.

Чтобъ принять во вниманіе перерѣзывающія напряженія разсмотримъ грузы w, соотвѣтствующіе отдѣльнымъ силамъ

$$G = 0{,}5 \text{ т.},\quad L = 2{,}5 \text{ т.},\quad D = 2gb + G - L = \text{около } 43 \text{ т.}$$

и вычисленные по формулѣ $w_m = \frac{\varkappa P}{GF} EJ_c^{*)} = \frac{5}{2}\frac{PJ_c}{F_s}$ (гдѣ $F_s = 0{,}0140$ до $0{,}0164 \times 1{,}2$ м².); грузы эти обозначены на чертежѣ цифрами 1, 11, 15 и равны соотвѣтственно:

$$w_1 = \frac{5}{2} \cdot 0{,}5 \frac{0{,}025}{0{,}014} = 2 \text{ т. м}^2. ^{**)}$$

$$w_{11} = \frac{5}{2} \cdot 2{,}5 \frac{0{,}025}{0{,}014} = 11 \text{ т. м}^2.$$

$$w_{15} = \frac{5}{2} \cdot 43 \frac{0{,}025}{0{,}0164 \cdot 1{,}2} = 138 \text{ т. м}^2.;$$

величины же грузовъ

$$z_s = \frac{5}{2}\frac{gJ_c}{F_s}, \text{ т. е.}$$

$$z_s = \frac{5}{2} \cdot 1{,}3 \frac{0{,}025}{0{,}014} = 6 \text{ тм. до } z_s = \frac{5}{2} \cdot 1{,}3 \frac{0{,}025}{0.0164 \cdot 1{,}2} = 4 \text{ тм.},$$

зависящихъ отъ постоянной нагрузки $g = 1{,}3$ т., необходимо вычесть. Такимъ образомъ нами найдена грузовая площадь (окаймленная краснымъ) для линіи прогибовъ, разсматриваемой какъ веревочный многоугольникъ; величины площадей отдѣльныхъ участковъ, выраженныя въ т. м²., выписаны въ таблицѣ:

№	Величина площадей.	№	Величина площадей.	№	Величина площадей.
2	57	10	258	20	255
3	48	12	510	21	189
4	84	13	82	22	171
5	102	14	86	23	123
6	149	16	153	24	60
7	194	17	98	25	73
8	209	18	347	26	52
9	223	19	359	27	62

*) Здѣсь G означаетъ, конечно, коэффиціентъ поперечной упругости.

**) Этотъ грузъ не могъ быть отложенъ, такъ какъ величина его весьма мала.

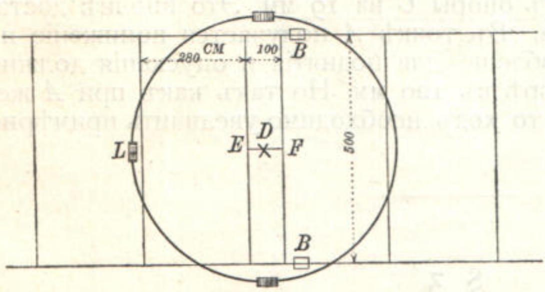
Линейный масштабъ для фермы взятъ 1 : 240, прогибы же вычерчены въ масштабѣ 2 : 3. Поэтому

$$\nu = 240 \cdot \frac{2}{3} = 160$$

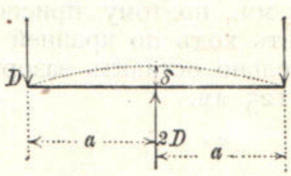
и полюсное разстоянiе

$$H = \frac{EJ_c}{\nu} = \frac{20\ 000\ 000 \cdot 0{,}025}{160} = 3\ 125 \text{ т. м}^2.$$

Надо замѣтить еще, что реакцiи цапфы вращенiя и опорнаго колеса не передаются непосредственно главнымъ формамъ, а черезъ посредство упругихъ промежуточныхъ фермъ. Ферма для цапфы *EF* (см. фиг. 23, гдѣ представленъ планъ средней части моста) имѣетъ пролетъ въ 100 см.; моментъ инерцiи площади поперечнаго сѣченiя



Фиг. 23.



Фиг. 24.

$= 200\ 000$ см^4.; прогибъ этой фермы можно опредѣлить по формулѣ, имѣющей мѣсто для случая нагрузки на фиг. 24:

$$\delta' = \frac{1}{3}\frac{Da^3}{EJ}, \text{ а при } D = 43 \text{ т.,}$$

$$\delta' = \frac{1}{3}\frac{43 \cdot 50^3}{2\ 000 \cdot 200\ 000} \text{ см.;}$$

для поперечныхъ фермъ, поддерживающихъ ферму для цапфъ, при общемъ моментѣ инерцiи $J = 1\ 750\ 000$ см^4., получаемъ

$$\delta'' = \frac{1}{3} \cdot \frac{43 \cdot 250^3}{2\ 000 \cdot 1\ 750\ 000} \text{ см.}$$

Сдѣлавъ вычисленiя, найдемъ, что $\delta' + \delta'' = 0{,}7$ мм.; точка опоры *D* лежитъ выше начерченной на фиг. 21 (листъ чертежей 1) упругой линiи главной фермы именно на эту величину. Реакцiя опорнаго колеса передается главнымъ образомъ поперечной фермѣ, лежащей непосредственно вблизи этого колеса. При $J = 400\ 000$ см^4. получимъ

$$\delta''' = \frac{1}{3}\frac{2{,}5 \cdot 250^3}{2\ 000 \cdot 400\ 000} = 0{,}016 \text{ см.} = 0{,}2 \text{ мм.}^{*)}$$

*) Этой величиной въ большинствѣ случаевъ пренебрегаютъ.

Обозначимъ теперь при *закрытомъ, но не нагруженномъ* мостѣ (фиг. 19) буквами:

y_d разстояніе отъ нижняго края цапфы (пятки) до верхняго края подпятника,
y_l разстояніе отъ нижняго края опорнаго колеса до верхняго рельса,
y'_d прогибъ въ точкѣ D отъ собственнаго вѣса,
y'_l тоже въ точкѣ L *)

и примемъ, что $y_d + y'_d = 1{,}3$ мм.
$y_l + y'_l = 18$ мм. **),

тогда на фиг. 21 получимъ положеніе опорныхъ точекъ A, B, C, нанесенное по отношенію къ линіи прогибовъ открытаго моста: отсюда узнаемъ, что при пониженіи опоры A ферма отдаляется отъ опоры B на 1,00 мм., и отъ опоры C на 19 мм. Это вполнѣ достаточно для поворота моста. Въ точкѣ A получается пониженіе на 120 мм., поэтому приспособленіе для поднятія и опусканія должно имѣть ходъ по крайней мѣрѣ въ 120 мм. Но такъ какъ при A желательно оставить зазоръ, то ходъ необходимо увеличить примѣрно до 125 мм.

---

§ 3.

Прямая балка съ задѣланными концами.

9. Сдѣлаемъ изслѣдованіе прямаго бруса, задѣланнаго обоими концами, путемъ рѣшенія слѣдующей задачи, весьма важной также и для дальнѣйшихъ изслѣдованій. *Пусть на горизонтальный брусъ AB, лежащій свободно на двухъ опорахъ, съ одинаковымъ повсюду поперечнымъ сѣченіемъ, дѣйствуютъ вертикальныя силы P. Кромѣ того пусть на концы бруса дѣйствуютъ пары силъ, моменты которыхъ равны* M_A и M_B. *Требуется вычислить углы наклоненія* α' *и* α'' *крайнихъ касательныхъ къ упругой линіи.* Фиг. 25.

ACB представляетъ веревочный многоугольникъ, построенный для грузовъ P при полюсномъ разстояніи 1; заштрихованная площадь ACB представитъ тогда площадь моментовъ для простой балки AB, находящейся только подъ дѣйствіемъ грузовъ P, и изгибающіе моменты для которой по концамъ ея равны нулю. Если ввести теперь моменты M_A и M_B, то замыкающую линію AB надо замѣнить замыкающей линіей $A'B'$; эта послѣдняя опредѣляется ординатами $\overline{AA'} = M_A$, $\overline{BB'} = M_B$. Сѣченію балки C соотвѣтствуетъ тогда изгибающій моментъ $M = \overline{CC'}$.

---

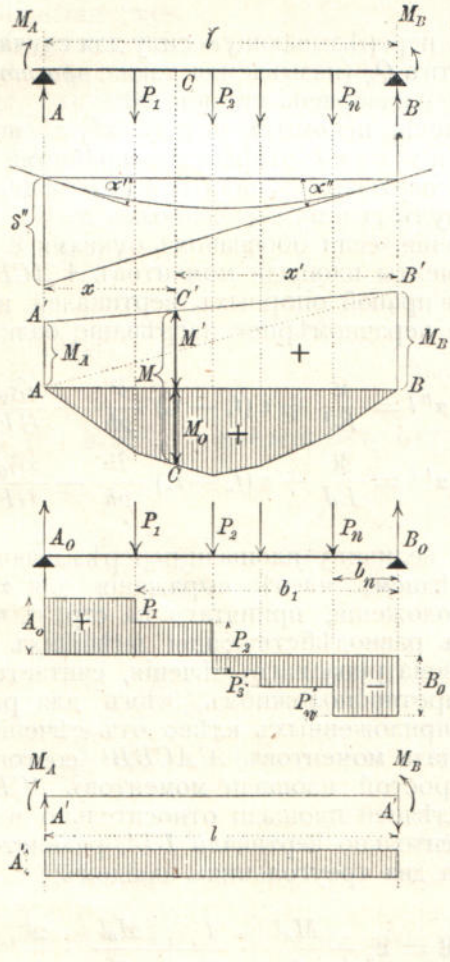
*) Прогибы y'_d, y'_l должны быть опредѣлены, конечно, съ помощью отдѣльнаго изслѣдованія; они равняются въ данномъ примѣрѣ соотвѣтственно 0,2 мм. и 1,2 мм.

**) На фиг. 21 (листъ черт. 1) это разстояніе обозначено ошибочно въ 13 мм. вмѣсто 18 мм. Примѣч. переводч.

Заштрихованную на фиг. 27 площадь можно назвать *простой площадью моментовъ* для балки AB; если ордината ея для сѣченія x равняется M_0, то получимъ

$$(1) \qquad M = M_0 + M' = M_0 + M_A \frac{x'}{l} + M_B \frac{x}{l} .$$

Подобнымъ же образомъ сопротивленія опоръ A и B можно выразить также въ зависимости отъ опорныхъ моментовъ M_A, M_B и отъ сопротивленій A_0, B_0 (фиг. 28), соотвѣтствующихъ случаю $M_A = 0$, $M_B = 0$. Къ этому добавимъ еще, что опорные моменты



Фиг. 25.
Фиг. 26.
Фиг. 27.
Фиг. 28.
Фиг. 29.

вызываютъ сами по себѣ два сопротивленія опоръ A', равныя по величинѣ, но противоположныя по направленію (фиг. 29), которыя опредѣляются изъ уравненія равновѣсія

$$(2) \qquad A' l + M_A - M_B = 0 .$$

Тогда получаемъ формулы:

$$(3)\qquad \begin{cases} A = A_0 + \dfrac{M_B - M_A}{l} \\ B = B_0 + \dfrac{M_A - M_B}{l} \end{cases}$$

а отсюда, безъ дальнѣйшихъ объясненій, узнаемъ, что перерѣзывающая сила для какого нибудь сѣченія опредѣляется изъ уравненія

$$(4)\qquad Q = Q_0 + \frac{M_B - M_A}{l},$$

гдѣ Q_0 означаетъ перерѣзывающую силу для случая $M_A = 0$, $M_B = 0$. Площадь количествъ Q_0 (называемая также *простой площадью перерѣзывающихъ силъ*) начерчена на фиг. 28.

Для опредѣленія искомыхъ угловъ α'', α' вычислимъ сначала отрѣзки $\delta'' = \alpha'' l$ и $\delta' = \alpha' l$, отсѣкаемые крайними касательными къ упругой линіи на вертикаляхъ опоръ A и B (фиг. 26), что сдѣлаемъ съ помощью формулъ 11 и 25, выведенныхъ въ § 1, и затѣмъ найдемъ слѣдующія уравненія, если обозначимъ буквами $\mathfrak{L}$ и соотвѣтственно $\mathfrak{R}$ статическіе моменты площади моментовъ $A'ACBB'$ (фиг. 27) относительно лѣвой и правой опорныхъ вертикалей и примемъ, кромѣ того, во вниманіе неравномѣрное нагрѣваніе балки:

$$(5)\qquad \begin{aligned} \alpha'' l &= \frac{\mathfrak{L}}{EJ} + \varepsilon (t_u - t_o) \frac{l^2}{2h} + \frac{\varkappa \mathfrak{F}_Q}{GF} \\ \alpha' l &= \frac{\mathfrak{R}}{EJ} + \varepsilon (t_u - t_o) \frac{l^2}{2h} - \frac{\varkappa \mathfrak{F}_Q}{GF}, \end{aligned}$$

гдѣ $\mathfrak{F}_Q$ означаетъ величину площади перерѣзывающихъ силъ. Знакъ минусъ въ послѣднемъ членѣ выраженія для $\alpha' l$ получается на основаніи того положенія, принятаго на стр. 6, что перерѣзывающая сила Q, какъ равнодѣйствующая внѣшнихъ силъ, дѣйствующихъ правѣе разсматриваемаго сѣченія, считается положительной въ направленіи противоположномъ, чѣмъ для равнодѣйствующей внѣшнихъ силъ, приложенныхъ влѣво отъ сѣченія.

Теперь площадь моментовъ $A'ACBB'$ состоитъ изъ трапеціи $A'ABB'$ и изъ простой площади моментовъ ACB. Пусть статическій моментъ послѣдней площади относительно вертикали AA' равняется $\mathfrak{L}_0$, а относительно вертикали BB', равняется $\mathfrak{R}_0$. Тогда, разлагая трапецію на два треугольника, найдемъ:

$$(6)\qquad \begin{cases} \mathfrak{L} = \mathfrak{L}_0 + \dfrac{M_A l}{2} \cdot \dfrac{l}{3} + \dfrac{M_B l}{2} \cdot \dfrac{2l}{3} \\ \mathfrak{R} = \mathfrak{R}_0 + \dfrac{M_A l}{2} \cdot \dfrac{2l}{3} + \dfrac{M_B l}{2} \cdot \dfrac{l}{3}. \end{cases}$$

Площадь перерѣзывающихъ силъ слагается изъ простой площади перерѣзывающихъ силъ (фиг. 28), величина которой $\mathfrak{F} = A_0 l_1 - P_1 b_1 -$

$- P_2 b_2 \ldots - P_n b_n = 0$, и изъ площади прямоугольника (фиг. 29), размѣры котораго $A' = \frac{1}{l}(M_B - M_A)$ и l, а потому получимъ

$$\mathfrak{F}_{\mathfrak{Q}} = M_B - M_A.$$

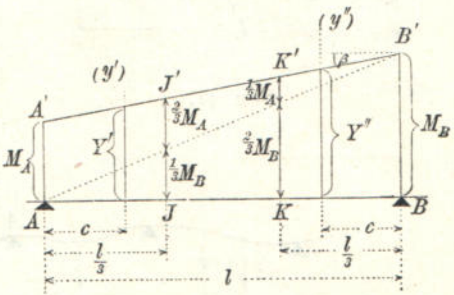
Подстановка этихъ значенiй въ уравненiе 5 приводитъ къ формулѣ

$$(7) \left\{ \begin{aligned} EJ\alpha'' &= \frac{\mathfrak{L}_0}{l} + \frac{1}{6}(M_A + 2M_B)\,l + \varkappa \frac{EJ}{GFl}(M_B - M_A) + (t_u - t_o)\frac{l}{2h}\varepsilon EJ \\ EJ\alpha' &= \frac{\mathfrak{R}_0}{l} + \frac{1}{6}(M_B + 2M_A)\,l + \varkappa \frac{EJ}{GFl}(M_A - M_B) + (t_u - t_o)\frac{l}{2h}\varepsilon EJ; \end{aligned} \right.$$

эту формулу можно упростить слѣдующимъ образомъ. Прямая $A'B'$, опредѣляемая опорными моментами M_A и M_B, уголъ наклоненiя которой къ горизонту $= \beta$, фиг. 30, отсѣкаетъ на вертикаляхъ, проведенныхъ черезъ точки дѣленiя пролета l на три равныя части, отрѣзки

$$\overline{JJ'} = \frac{1}{3}(M_B + 2M_A) \text{ и}$$

$$\overline{KK'} = \frac{1}{3}(M_A + 2M_B),$$



Фиг. 30.

а на вертикаляхъ (y') и (y''), проведенныхъ отъ опоръ A и B на разстоянiи

$$(8) \qquad c = \frac{l}{3} - 2\varkappa \frac{FJ}{GFl},$$

отсѣкаетъ отрѣзки:

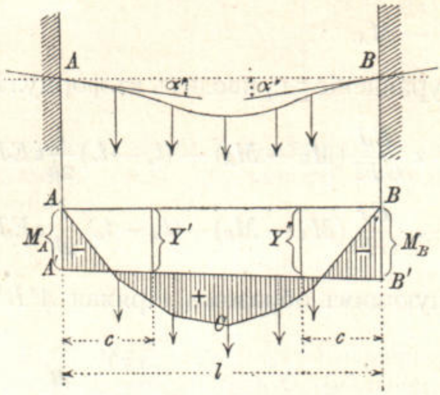
$$(9) \left\{ \begin{aligned} Y' &= \overline{JJ'} - 2\varkappa \frac{EJ}{GFl}\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{3}(M_B + 2M_A) - 2\varkappa \frac{EJ}{GFl^2}(M_B - M_A) \\ Y'' &= \overline{KK'} + 2\varkappa \frac{EJ}{GFl}\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{3}(M_A + 2M_B) + 2\varkappa \frac{EJ}{GFl^2}(M_B - M_A). \end{aligned} \right.$$

А отсюда заключаемъ, что уравненiя 7 могутъ быть написаны въ слѣдующей формѣ:

$$(10) \qquad \begin{aligned} EJ\alpha'' &= \frac{1}{2}Y''l + \frac{\mathfrak{L}_0}{l} + (t_u - t_o)\frac{l}{2h}\varepsilon EJ \\ EJ\alpha' &= \frac{1}{2}Y'l + \frac{\mathfrak{R}_0}{l} + (t_u - t_o)\frac{l}{2h}\varepsilon EJ. \end{aligned}$$

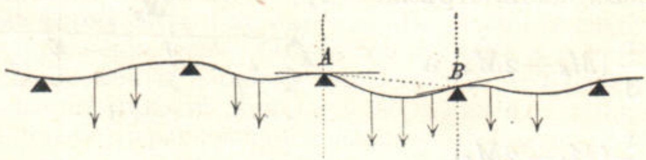
Эти соображенiя примѣнимы тогда, когда имѣемъ дѣло съ задачей обратной, т. е. *когда углы α'' и α' даны, а требуется опре-*

дѣлить моменты M_A и M_B; этотъ случай встрѣчается, напр., при изслѣдованіи первоначально горизонтальнаго бруса, задѣланнаго обоими концами, которые вслѣдствіе осадки опоръ повернулись на углы α', α'', найденные непосредственно изъ наблюденій (фиг. 31). Тогда съ помощью уравненій 10 надо вычислить моменты Y', Y'' и, пользуясь ими, провести замыкающую $A'B'$. На фиг. 31 предположено, что Y', Y'', отрицательны.



Фиг. 31.

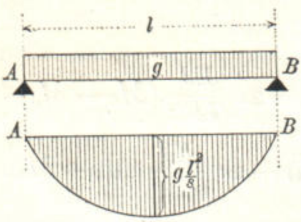
Особенно важное примѣненіе могутъ найти уравненія 10 въ многопролетныхъ балкахъ, такъ какъ отдѣльныя части ея AB (фиг. 32) могутъ разсматриваться какъ брусья съ концами, задѣланными подъ опредѣленными углами.



Фиг. 32.

Изъ зависимости между этими углами и опорными моментами мы можемъ опредѣлить значеніе моментовъ. Прежде чѣмъ перейти къ разрѣшенію этой задачи, покажемъ сначала способъ опредѣленія статическихъ моментовъ $\mathfrak{L}_0$ и $\mathfrak{R}_0$.

a. *Вліяніе равномѣрно распредѣленной нагрузки g* на единицу длины опредѣляется быстрѣе всего расчетнымъ путемъ. Простая линія моментовъ будетъ параболой со стрѣлкой $\frac{1}{8}gl^2$., фиг. 33. Величина площади параболы $= \frac{1}{8}gl^2 . \frac{2}{3}l$, такимъ образомъ получаемъ:



Фиг. 33.

$$(11) \quad \mathfrak{L}_0 = \mathfrak{R}_0 = \frac{1}{8}gl^2 \cdot \frac{2}{3}l \cdot \frac{l}{2} = \frac{gl^4}{24}.$$

b. *Вліяніе сосредоточеннаго груза.* Простая площадь моментовъ представляется треугольникомъ ABC, фиг. 34, стороны котораго отсѣкаютъ на вертикаляхъ опоръ A и B моменты $\overline{AJ} = P\xi$ и $\overline{BJ'} = P\xi'$. Разсматривая ABC какъ разность между треугольниками ABJ' и BCJ', найдемъ

$$(12) \qquad \mathfrak{R}_0 = P\xi' \frac{l}{2}\frac{l}{3} - P\,\xi' \frac{\xi'}{2}\frac{\xi'}{3} = \frac{Pl^3}{6}\left(\frac{\xi'}{l} - \frac{\xi'^3}{l^3}\right);$$

точно также можемъ получить:

$$\mathfrak{L}_0 = \frac{Pl^3}{6}\left(\frac{\xi}{l} - \frac{\xi^3}{l^3}\right). \tag{13}$$

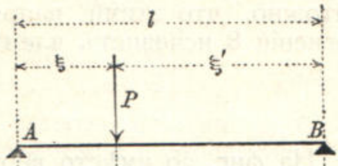
Построивъ такимъ образомъ кубическую параболу, уравненіе которой

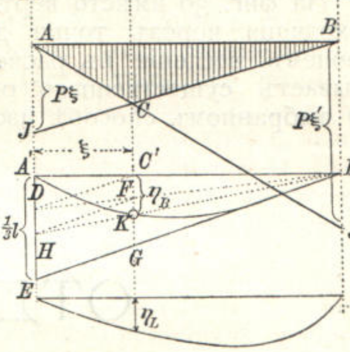
$$\eta_R = \frac{l}{3}\left(\frac{\xi'}{l} - \frac{\xi'^3}{l^3}\right). \tag{14}$$

мы можемъ теперь выразить вліяніе группы сосредоточенныхъ грузовъ на величину статическаго момента $\mathfrak{R}_0$ слѣдующею формулой:

$$\mathfrak{R}_0 = \frac{1}{2} l^2 \Sigma P\eta_R. \tag{15}$$

Фиг. 34.





Фиг. 35.

Эта кубическая парабола, которую можно назвать линіей количествъ η_R, получается слѣдующимъ образомъ. Откладываемъ на фиг. 35 $A'E = \frac{1}{3} l$, проводимъ EB', возставляемъ въ точкѣ ξ перпендикуляръ $C'G$ къ прямой $A'B'$, проводимъ $C'D \parallel B'E$, опредѣляемъ точку пересѣченія F прямыхъ DB' и $C'G$, проводимъ $FH \parallel B'E$ и соединяемъ H съ B'. Прямая HB' пересѣкаетъ $C'G$ въ точкѣ K, принадлежащей искомой кубической параболѣ. Зеркальное изображеніе линіи количествъ η_R, называемое линіей количествъ η_L, выражается формулой:

$$\mathfrak{L}_0 = \frac{1}{2} l^2 \Sigma P\eta_L. \tag{16}$$

Примѣръ. Для балки съ горизонтально задѣланными концами при неподвижныхъ стѣнахъ, получимъ (причемъ $\alpha' = 0$ и $\alpha'' = 0$):

$$0 = \frac{1}{2} Y'' l + \frac{gl^3}{24} + \frac{1}{2} l \Sigma P\eta_L + (t_u - t_o)\frac{l}{2h}\varepsilon EJ$$

$$0 = \frac{1}{2} Y' l + \frac{gl^3}{24} + \frac{1}{2} l \Sigma P\eta_R + (t_u - t_o)\frac{l}{2h}\varepsilon EJ,$$

а отсюда находимъ, отдѣльно для каждаго случая:

вліяніе равномѣрной нагрузки: $Y' = Y'' = -\frac{gl^2}{12}$

" сосредоточенныхъ грузовъ: $Y' = -\Sigma P\eta_R$
$Y'' = -\Sigma P\eta_L$

" измѣненія температуры $Y' = Y'' = +\frac{\varepsilon EJ}{h}(t_u - t_o)$.

Такимъ образомъ линія количествъ η^L будетъ линіей вліянія для количествъ Y'', а линія количествъ η_R будетъ линіей вліянія для количествъ Y'.

Обратимъ еще вниманіе на то, что вліяніе перерѣзывающихъ напряженій на статически неопредѣлимыя величины Y', Y'' настолько ничтожно, что этими напряженіями можно пренебречь. Тогда въ уравненіи 8 исчезнетъ членъ, зависящій отъ $\varkappa$, и мы получимъ

$$c = \frac{1}{3} l.$$

На фиг. 30 вмѣсто вертикалей y', y'' будемъ имѣть вертикали, проходящія черезъ точки дѣленія пролета на три равныя части. Впрочемъ, введеніе въ расчетъ перерѣзывающихъ напряженій не вызываетъ существеннаго осложненія въ рѣшеніи нашей задачи при выбранномъ способѣ изслѣдованія.

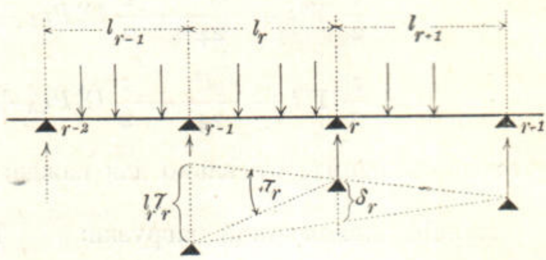
ОТДѢЛЪ II.

Многопролетныя балки.

§ 4.

Балки съ произвольнымъ числомъ опоръ, перемѣщенія которыхъ заданы.

10. Общій пріемъ. Общее изслѣдованіе неразрѣзной балки, лежащей на нѣсколькихъ опорахъ, фиг. 36, было приведено уже въ выпускѣ IX (§ 14). Выведенныя тамъ правила примѣнимы какъ къ рѣшеткѣ, такъ и къ сплошнымъ фермамъ; остается сказать еще нѣсколько словъ о линіяхъ прогибовъ, построенныхъ для состояній нагрузокъ... $M_{r-1} = -1$, $M_r = -1$, $M_{r+1} = -1$.



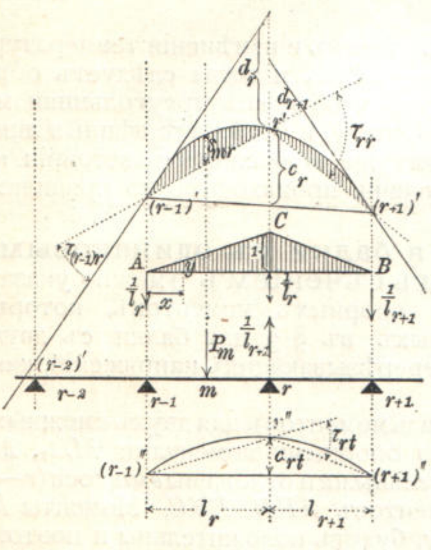
Фиг. 36.

Мы разсмотрѣли два смежныхъ пролета l_r, l_{r+1}, фиг. 37, построили площадь моментовъ для состоянія $M_r = -1$, т. е. треугольникъ ABC, высота котораго по абсолютной величинѣ равняется 1, и опредѣлили соотвѣтствующую линію прогибовъ $(r-1)'$, r', $(r+1)'$. Затѣмъ мы опредѣлили линію прогибовъ $(r-1)''$ r'' $(r+1)''$, зависящую только отъ дѣйствія измѣненія температуры (напр. отъ нагрѣванія солнечными лучами верхняго пояса), и нашли, что между опорными моментами M_{r-1}, M_r, M_{r+1} существуетъ такая зависимость

$$M_{r-1}\frac{d_r}{l_r}+M_r\left(\frac{c_r}{l_r}+\frac{c_r}{l_{r+1}}\right)+M_{r+1}\frac{d_{r+1}}{l_{r+1}}=N_r, \text{ гдѣ} \tag{1}$$

$$N_r=-\left\{\Sigma P_m\delta_{mr}+\frac{l_r+l_{r+1}}{l_r l_{r+1}}(\delta_r+c_{rt})\right\}. \tag{2}$$

Значеніе буквъ d_r, d_{r+1}, c_r, c_{rt}, δ_{mr} понятно изъ фиг. 37; δ_r означаетъ вертикальное перемѣщеніе опорной точки r относительно точекъ $(r-1)$ и $(r+1)$, фиг. 36, которое происходитъ вслѣдствіе осадки опоръ; это перемѣщеніе, считаемое положительнымъ снизу вверхъ, можно принимать *заданнымъ* (такъ такъ его легко получить путемъ непосредственнаго наблюденія). На членъ $\Sigma P_m\delta_{mr}$ имѣютъ вліяніе только грузы, лежащіе между $(r-1)$ и $(r+1)$. Такимъ образомъ, если оба пролета l_r и l_{r+1} не нагружены, то $\Sigma P_m\delta_{mr}=0$.



Фиг. 37.

При построеніи линіи прогибовъ $(r-1)'\,r'\,(r+1)'$ всегда можно пренебречь перерѣзывающими напряженіями. Тогда эта линія представитъ веревочный многоугольникъ для непрерывной нагрузки, имѣющей для взятаго x высоту $z=\frac{y}{EJ}$, если черезъ y обозначить высоту треугольника моментовъ ACB въ разсматриваемомъ сѣченіи. Полюсное разстояніе равняется 1. Если теперь взять полюсное разстояніе $=w_P$, придать треугольнику моментовъ ACB произвольную, но равную для всѣхъ опорныхъ точекъ высоту y_c и положить затѣмъ $z=y\frac{J_c}{J}$ вмѣсто $z=\frac{y}{EJ}$, гдѣ J_c означаетъ произвольный постоянный моментъ инерціи площади поперечнаго сѣченія, то значенія d, c и δ_{mr} придется еще умножить на $w_P : EJ_c y_c$ или—что приводитъ къ одному и тому же—раздѣлить на это выраженіе членъ δ_r+c_{rt}. Тогда получимъ

$$N_r=-\left\{\Sigma P_m\delta_{mr}+\frac{EJ_c(l_r+l_{r+1})\,y_c}{w_P l_r l_{r+1}}(\delta_r+c_{rt})\right\}. \tag{3}$$

Если площади участковъ w, на которые разбита грузовая площадь, выражены въ кв. метр., то w_P должно быть выражено въ кв. метр., а EJ_c — въ т. м². *). Тогда $\frac{EJ_c}{w_P}$ получается въ тоннахъ.

*) За единицу силъ возьмемъ тонну. Тогда EJ_c выразится въ $\frac{\text{т}}{\text{м}^2}\cdot\text{м}^4=\text{т. м}^2$.

Высоту y_c надо измѣрить по линейному масштабу чертежа фермы. Если всѣ участки имѣютъ одну и ту же ширину λ, то за грузы w надо принять среднія высоты участковъ, причемъ полюсное разстояніе надо выразить въ метрахъ. Тогда въ уравн. 3 вмѣсто $EJ_c : w_P$ войдетъ выраженіе $EJ_c : w_P\lambda$.

При опредѣленіи c_{rt} надо разсмотрѣть линію прогибовъ $(r-1)''$ r'' $(r+1)''$, которая построена какъ цѣпная линія съ полюснымъ разстояніемъ 1 для непрерывной нагрузки

$$(4)\qquad z_t = \frac{\varepsilon\,(t_o - t_u)}{h},$$

гдѣ h означаетъ высоту балки. Всегда возможно ввести для h среднее постоянное значеніе.

Тогда разсматриваемая линія прогибовъ будетъ параболой и мы получимъ

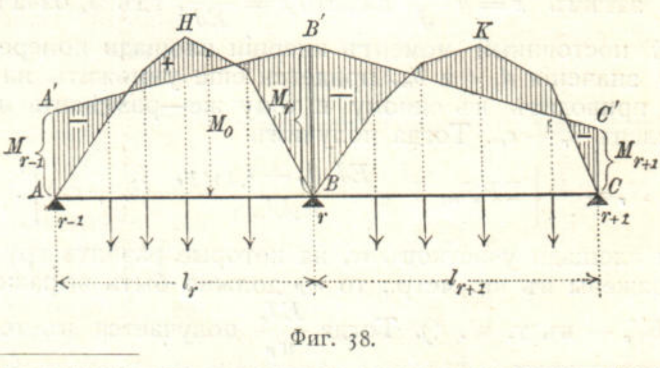
$$(5)\qquad c_{rt} = \frac{\varepsilon\,(t_o - t_u)\,l_r l_{r+1}}{2h}.$$

Если перемѣщенія опорныхъ точекъ и измѣненія температуры не приняты во вниманіе, то $N_r = -\Sigma P_m \delta_{mr}$ и тогда слѣдуетъ обратить исключительно вниманіе на то, чтобъ всѣ треугольники моментовъ получили одну и туже высоту y_c и чтобъ всѣ цѣпныя линіи были построены при одномъ и томъ же полюсномъ разстояніи w_P.

Дальнѣйшее изслѣдованіе задачи происходитъ по правиламъ № 131 и 132 (выпускъ IX).

11. Для частнаго случая балки съ одинаковымъ по всей длинѣ поперечнымъ сѣченіемъ *) можно указать еще другой способъ опредѣленія опорныхъ моментовъ, который основанъ на правилахъ, найденныхъ въ § 3 для балки съ двумя задѣланными концами. Вліяніемъ перерѣзывающихъ напряженій, какъ и раньше, можно пренебречь.

На фиг. 38 заштрихована площадь моментовъ для двухъ смежныхъ пролетовъ l_r, l_{r+1}; опредѣляется она опорными моментами M_{r-1}, M_r, M_{r+1}, которые здѣсь взяты *отрицательными* и отложены *выше* оси $(r-1)$ r $(r+1)$, и простыми линіями моментовъ AHB, BKC. Моменты M_0 при грузахъ, направленныхъ книзу, будутъ положительны и поэтому они откладываются также кверху, такъ что площадь моментовъ неразрѣзной балки получится какъ разность между простыми площадями моментовъ и трапеціями $AA'B'B$ и $BB'C'C$. Обозначимъ

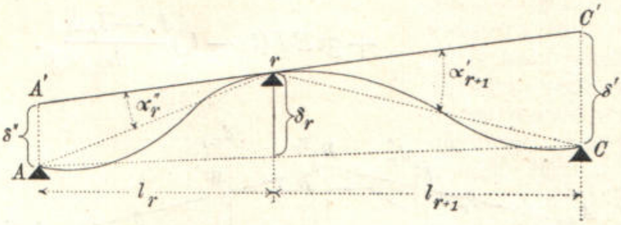


Фиг. 38.

*) Предположеніе объ одинаковомъ всюду поперечномъ сѣченіи вполнѣ допустимо почти во всѣхъ случаяхъ.

черезъ $\mathfrak{L}_{or}$ статическій моментъ простой площади моментовъ $AHBA$ относительно вертикали точки $(r-1)$, а черезъ $\mathfrak{R}_{o(r+1)}$ — статическій моментъ площади $BKCB$ относительно вертикали точки $(r+1)$.

Для прямыхъ $A'B'$ и $B'C'$ введемъ обозначенія g_r и g_{r+1}, а многоугольникъ изъ всѣхъ прямыхъ g, ординаты котораго на опорахъ равняются опорнымъ моментамъ, назовемъ краткости ради *многоугольникомъ* M.



Фиг. 39.

Если прямая $A'C'$ на фиг. 39 представляетъ касательную, проведенную въ точкѣ r къ упругой линіи, то при обозначеніяхъ на этой фигурѣ получимъ

$$\delta_r = \frac{\delta' l_r + \delta'' l_{r+1}}{l_r + l_{r+1}}\text{, откуда}$$

$$\frac{\delta''}{l_r} + \frac{\delta'}{l_{r+1}} = \delta_r \frac{l_r + l_{r+1}}{l_r l_{r+1}}\text{ или}$$

$$\alpha_r'' + \alpha'_{r+1} = \delta_r \frac{l_r + l_{r+1}}{l_r l_{r+1}}.$$

Теперь же согласно уравн. 10, стр. 29, найдемъ:

$$-EJ\alpha_r'' = \frac{1}{2} Y_r'' l_r + \frac{\mathfrak{L}_{or}}{l_r} + (t_u - t_o)\frac{l_r}{2h}\varepsilon EJ$$

$$-EJ\alpha'_{r+1} = \frac{1}{2} Y'_{r+1} l_{r+1} + \frac{\mathfrak{R}_{or(i+1)}}{l_{r+1}} + (t_u - t_o)\frac{l_{r+1}}{2h}\varepsilon EJ,$$

гдѣ Y''_r и Y'_{r+1} означаютъ ординаты многоугольника M, отсѣкаемыя прямыми g_r, g_{r+1} на вертикаляхъ d''_r, d'_{r+1}, проведенныхъ черезъ ближайшія къ опорѣ r точки дѣленія пролетовъ на три равныя части, фиг. 40.

Такимъ образомъ находимъ:

$$Y''_r l_r + Y'_{r+1} l_{r+1} = -\frac{2\mathfrak{L}_{or}}{l_r} - \frac{2\mathfrak{R}_{o(r+1)}}{l_{r+1}} - \varepsilon EJ(t_u - t_o)\frac{l_r + l_{r+1}}{h} - \tag{6}$$

$$-2EJ\delta_r \frac{l_r + l_{r+1}}{l_r l_{r+1}}$$

а такъ какъ

$$Y''_r = \frac{1}{3}M_{r-1} + \frac{2}{3}M_r, \quad Y'_{r+1} = \frac{2}{3}M_r + \frac{1}{3}M_{r+1},$$

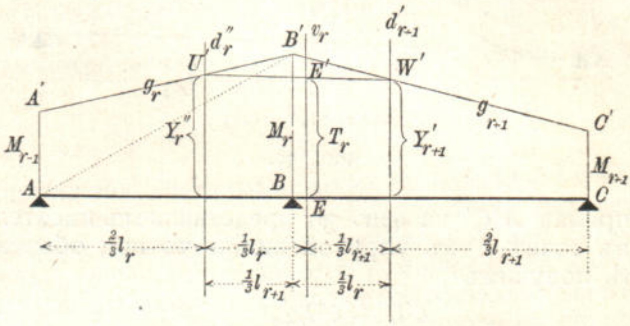
то получимъ

$$M_{r-1}l_r + 2M_r(l_r + l_{r+1}) + M_{r+1}l_{r+1} = N_r, \tag{7}$$

гдѣ

$$N_r = -\left\{ 6\left(\frac{\mathfrak{L}_{or}}{l_r} + \frac{\mathfrak{R}_{o(r+1)}}{l_{r+1}}\right) + 6EJ\delta_r \frac{l_r + l_{r+1}}{l_r l_{r+1}} \right. \tag{8}$$

$$\left. + 3\varepsilon EJ(t_u - t_o)\frac{l_r + l_{r+1}}{h} \right\}.$$



Фиг. 40.

Уравненіе (7) называется обобщеннымъ *уравненіемъ Клапейрона*, потому что Клапейронъ впервые выразилъ въ такой формѣ условіе упругости неразрѣзной балки. Членъ N_r можно назвать *членомъ нагрузки* въ уравненіи Клапейрона.

Для поясненія графическаго способа разсмотримъ сначала уравненіе 6. Прямая $U'W'$, соединяющая конечныя точки ординатъ Y'', Y'_{r+1} (фиг. 40), на вертикальной прямой v_r, отстоящей отъ d''_r на разстояніи $\frac{1}{3}l_{r+1}$ и отъ d'_{r+1} на разстояніи $\frac{1}{3}l_r$, отсѣкаетъ отрѣзокъ

$$\overline{EE'} = \frac{Y''_r l_r + Y'_{r+1}l_{r+1}}{l_r + l_{r+1}};$$

вертикаль v_r называется *смежной опорной вертикалью*.

Обозначимъ этотъ отрѣзокъ буквой T_r, тогда, принимая во вниманіе уравн. 6, найдемъ:

$$T_r = -\frac{2}{l_r + l_{r+1}}\left(\frac{\mathfrak{L}_{or}}{l_r} + \frac{\mathfrak{R}_{o(r+1)}}{l_{r+1}}\right) - \frac{2EJ\delta_r}{l_r l_{r+1}} - \frac{\varepsilon EJ(t_u - t_o)}{h} \tag{9}$$

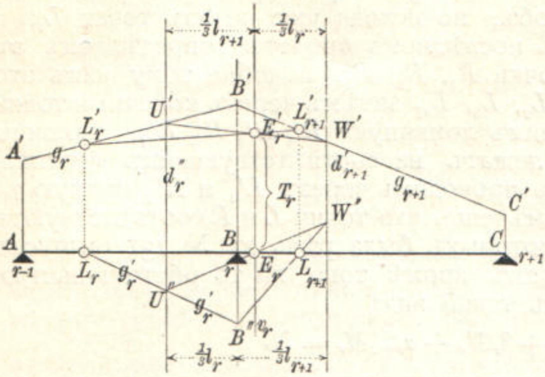
$$= \frac{N_r}{3(l_r + l_{r+1})}.$$

Поэтому T_r представляетъ *опредѣленное* количество, зависящее отъ нагрузки, отъ перемѣщенія опоры δ_r и отъ разности температуръ $t_u - t_o$; это количество обыкновенно *отрицательно*, а потому его надо отложить по вертикали v_r *выше* оси $(r-1)\ r\ (r+1)$.

Подобное правило, выведенное въ № 132 (выпускъ IX, стр. 78), привело къ простому рѣшенію такой задачи:

Задана точка L'_r прямой g_r, требуется найти точку L'_{r+1} прямой g_{r+1}, фиг. 41.

Возьмемъ на оси ABC точку, лежащую на вертикали подъ точкою L'_r, проведемъ черезъ L_r произвольную прямую g'_r, которая пересѣкаетъ вертикали d''_r и $B'B$ въ точкахъ U'' и B'', затѣмъ черезъ U'' и E_r проведемъ прямую, встрѣчающую прямую d'_{r+1} въ точкѣ W'' и соединимъ W'' съ B''. Точка L_{r+1}, въ которой пересѣкается прямая $W''B''$ съ осью ABC, будетъ лежать на вертикали подъ точкой L'_{r+1}. Такъ какъ затѣмъ три точки L'_r, E'_r и L'_{r+1} должны лежать на одной прямой, то положеніе точки L'_{r+1} такимъ образомъ опредѣлено и задача значитъ разрѣшена.

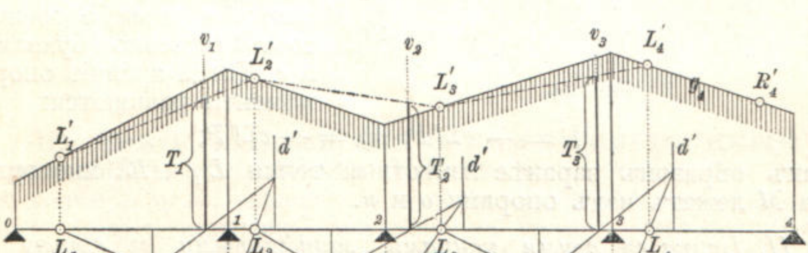


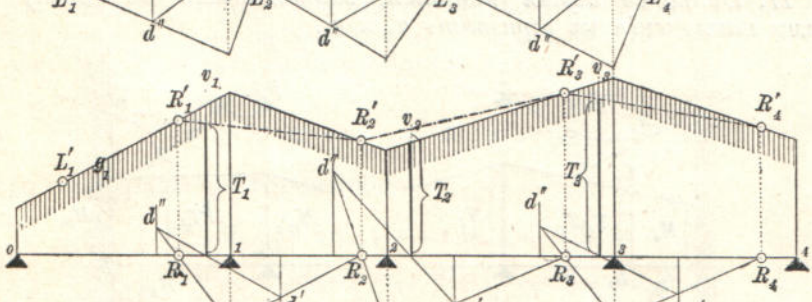
Фиг. 41.

На основаніи сдѣланныхъ изслѣдованій возможно построить многоугольникъ M, если только будутъ заданы двѣ точки многоугольника.

Такъ напр., если точки L'_1 и R'_4 принадлежатъ многоугольнику M для балки 0—4, фиг. 42, то на основаніи описаннаго спо-

Фиг. 42.





Фиг. 43.

соба, зная положенiе точки L_1, находимъ точку L_2, затѣмъ L_3 и L_4 и строимъ ломанную $L'_1 L'_2 L'_3 L'_4$, бока которой отсѣкаютъ на смежныхъ опорныхъ вертикаляхъ v_1, v_2, v_3 данные отрѣзки T_1, T_2, T_3. Теперь проводимъ черезъ L'_4 и R'_4 прямую g_4, а черезъ точки L'_3, L'_2, L'_1, остальныя стороны искомаго многоугольника M, заштрихованнаго на фигурѣ.

Для того чтобъ сдѣлать точную чертежную провѣрку, надо повторить описанный способъ, но исходя уже не изъ точки L_1, а изъ точки R_4, заданной въ послѣднемъ пролетѣ; опредѣляемъ въ дальнѣйшихъ пролетахъ точки R_3, R_2, R_1, подобно тому какъ это было сдѣлано для точекъ L_2, L_3, L_4, затѣмъ черезъ конечныя точки ординатъ T_3, T_2, T_1 проводимъ ломанную $R'_4 R'_3 R'_2 R'_1$, вершины которой R'_4, R'_3, R'_2, R'_1, лежатъ на соотвѣтствующихъ вертикаляхъ точекъ R, и наконецъ проводимъ черезъ L'_1 и R'_1 прямую g_1.

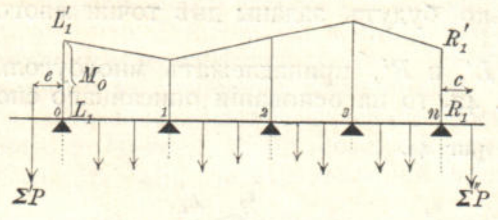
Въ заключенiе замѣтимъ еще, что точки L и R соотвѣтствуютъ *постояннымъ точкамъ*, о которыхъ была рѣчь въ № 131 (выпускъ IX, стр. 74). Затѣмъ укажемъ кромѣ того на то обстоятельство, что уравненiе 7 принимаетъ такой видъ

$$\alpha_r M_{r-1} + \beta_r M_r + \alpha_{r+1} M_r = N_r$$

и что поэтому опредѣленiе опорныхъ моментовъ можно произвести также по способу, описанному въ № 132 (выпускъ IX, стр. 78) съ помощью вертикалей I_r, II_r вмѣсто d_r'', v_r, d'_{r+1}).

Опишемъ два частныхъ случая.

I. Балка лежитъ свободно на всѣхъ опорахъ. На фиг. 44 представленъ общiй случай балки съ двумя свѣшивающимися концами. $\Sigma' P$ и $\Sigma'' P$ выражаютъ равнодѣйствующiя силъ, дѣйствующiя на свѣшивающiе концы; разстоянiе этихъ силъ отъ опоръ o и n обозначимъ соотвѣтственно буквами e и c. Тогда крайнiе опорные моменты равняются:

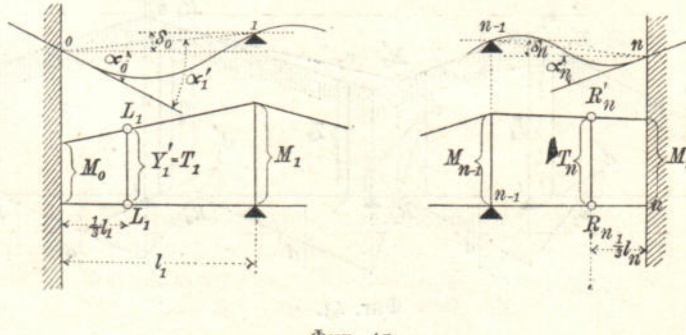


Фиг. 44.

$$M_o = -e\Sigma' P;\ M_n = -c\Sigma'' P;$$

такимъ образомъ заранѣе извѣстныя точки L'_1 и R'_n многоугольника M лежатъ надъ опорами o и n.

II. Балка съ двумя концами, задѣланными въ стѣну подъ углами наклоненiя къ горизонту α_o и α_n.



Фиг. 45.

Обозначимъ буквой δ_o вертикальное перемѣщеніе опорной точки o относительно опорной точки 1, фиг. 45, тогда получимъ

$$\delta_o + l_1 \alpha_o = l_1 \alpha_1' \quad \text{и}$$

$$EJ\alpha_1' = \frac{1}{2}\, Y' l_1 + \frac{\mathfrak{R}_{o1}}{l_1} + (t_u - t_o)\frac{l_1}{2h}\,\varepsilon EJ,$$

и затѣмъ найдемъ:

$$(10) \qquad \begin{cases} Y_1' = T_1, \text{ гдѣ} \\ T_1 = -\dfrac{2\mathfrak{R}_{o1}}{l_1^{\,2}} - \varepsilon EJ\dfrac{t_u - t_o}{h} + \dfrac{2EJ(\delta_o + l_1\alpha_o)}{l_1^{\,2}}. \end{cases}$$

Поэтому точка пересѣченія L_1' многоугольника M съ лѣвой вертикалью, проведенной въ лѣвой трети перваго пролета, будетъ заранѣе извѣстна; подобнымъ же путемъ можемъ опредѣлить въ n-омъ пролетѣ точку R'_n прямой g_n, если въ разстояніи $\frac{1}{3}\, l_n$ отъ точки n нанести ординату

$$\overline{R_n R_n'} = T_n = -\frac{2\mathfrak{L}_{on}}{l_n^{\,2}} - \varepsilon EJ\frac{t_u - t_o}{h} + \frac{2EJ(\delta_n + l_n\alpha_n)}{l_n^{\,2}}.$$

Такимъ образомъ точки L'_1 и R_n' и моменты T опредѣляютъ вполнѣ многоугольникъ M.

Уравненіе 10 можно представить также въ такой формѣ:

$$(11) \qquad \begin{cases} (2M_o + M_1)l_1 = N_1, \text{ гдѣ} \\ N_1 = -\dfrac{6\mathfrak{R}_{o1}}{l_1} - 3\,EJ\dfrac{t_u - t_o}{h}\, l_1 + \dfrac{6\,EJ(\delta_1 + l_1\alpha_o)}{l_1}. \end{cases}$$

12. Линіи вліянія для балки съ постояннымъ поперечнымъ сѣченіемъ. Предположимъ теперь, что постоянныя точки L и R найдены по описанному ранѣе способу; разсмотримъ вліяніе нагрузки, лежащей на какомъ нибудь пролетѣ l_r; пусть остальные пролеты остаются не нагруженными. Точка L раздѣляетъ пролетъ l_r на участки a_r и b_r, а точка R—на участки a'_r и b'_r, фиг. 46. Введемъ затѣмъ обозначенія

$$(12) \qquad b_r : a_r = \varkappa_r \quad \text{и} \quad b'_r : a'_r = \varkappa'_r,$$

тогда оба уравненія Клапейрона

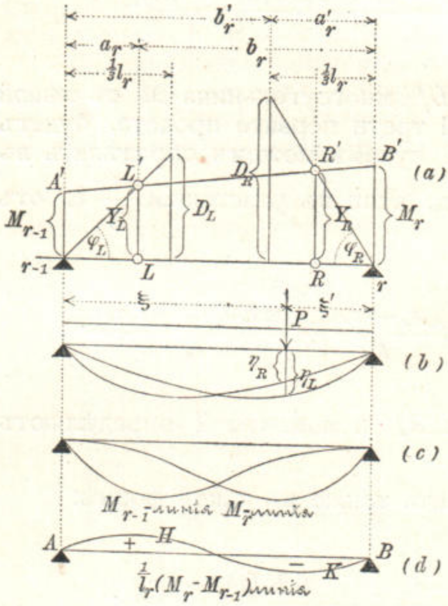
$$(13) \qquad \begin{cases} l_{r-1}M_{r-2} + 2(l_{r-1} + l_r)M_{r-1} + l_r M_r = N_{r-1} \\ l_r M_{r-1} + 2(l_r + l_{r+1})M_r + l_{r+1}M_{r+1} = N_r \end{cases}$$

можно преобразовать въ слѣдующія:

(14)
$$\varkappa_r M_{r-1} + M_r = \frac{N_{r-1}}{l_r}\ ^{*})$$
$$M_{r-1} + \varkappa_r' M_r = \frac{N_r}{l_r}.$$

Обозначивъ теперь ординаты прямой $A'B'$ въ точкахъ L и R буквами Y_L и Y_R, найдемъ

(15) $$Y_L = \frac{a_r}{l_r}(M_{r-1}\varkappa_r + M_r); \quad Y_R = \frac{a_r'}{l_r}(M_{r-1} + M_r \varkappa_r'),$$



Фиг. 46.

а потому окончательно получаемъ слѣдующія простыя выраженія для проведенія прямой $A'B'$

(16)
$$\begin{cases} Y_L = \dfrac{N_{r-1}}{l_r} \cdot \dfrac{a_r}{l_r}; \\[2ex] Y_R = \dfrac{N_r}{l_r} \cdot \dfrac{a_r'}{l_r}. \end{cases}$$

Отложивъ такимъ образомъ на вертикаляхъ, проведенныхъ черезъ трети пролета, ординаты

(17)
$$\begin{cases} D_L = \dfrac{1}{3}\dfrac{N_{r-1}}{l_r} \text{ и} \\[2ex] D_R = \dfrac{1}{3}\dfrac{N_r}{l_r} \end{cases}$$

и соединивъ конечныя точки ихъ съ сосѣдними опорами $r-1$ и r прямыми линіями, фиг. 46, найдемъ, что эти прямыя пересѣкаютъ вертикали точекъ L и R въ точкахъ L', R' прямой $A'B'$.

Такъ какъ нагрузка лежитъ только на пролетѣ l_r, то по уравн. 8, стр. 36, и по уравн. 15 и 16, стр. 31, имѣемъ:

$$N_{r-1} = -\frac{6\mathfrak{R}_{or}}{l_r}, \quad N_r = -\frac{6\mathfrak{L}_{or}}{l_r}, \text{ а также}$$

(18)
$$\begin{cases} D_L = \dfrac{2\mathfrak{R}_{or}}{l_r^2} = -\Sigma P\eta_R \\[2ex] D_D = \dfrac{2\mathfrak{L}_{or}}{l_r^2} = -\Sigma P\eta_L; \end{cases}$$

а отсюда слѣдуетъ, что

---

*) См. выпускъ IX, стр. 76; написанныя тамъ значенія α_r, β_r, $-\Sigma P_m \delta_{mr}$ надо замѣнить здѣсь соотвѣтственно черезъ l_r, $2(l_r + l_{r+1})$, N_r.

линія количествъ η_R *будетъ линіей вліянія для момента* D_L,

" " η_L " " " " " D_R *).

Съ помощью этихъ двухъ линій, построеніе которыхъ указано на стр. 30, мы имѣемъ возможность вычертить линіи вліянія для количествъ M_{r-1} и M_r.

Но слѣдующій пріемъ ведетъ къ цѣли гораздо быстрѣе. Углы наклоненія φ_L и φ_R прямыхъ $(r-1)L'$ и rR' заданы формулами

$$\operatorname{tg}\varphi_L = \frac{3D_L}{l}, \quad \operatorname{tg}\varphi_R = \frac{3D_R}{l_r},$$

поэтому мы получимъ слѣдующія значенія, указывающія на вліяніе груза $P = 1$:

$$\operatorname{tg}\varphi_L = \frac{3}{l_r}\eta_R = \frac{\xi'}{l} - \frac{\xi'^3}{l^3} \text{ (см. стр. 30)}$$

$$\operatorname{tg}\varphi_R = \frac{3}{l_r}\eta_L = \frac{\xi}{l} - \frac{\xi^3}{l^3};$$

эти значенія зависятъ только отъ отношеній $\xi' : l$ и $\xi : l$, а потому могутъ быть вычислены заранѣе разъ навсегда; съ этой цѣлью достаточно разбить пролетъ на 10 равныхъ частей. Тогда точкамъ дѣленія 1, 2, ... 9 будутъ соотвѣтствовать слѣдующія значенія:

$\xi : l$	$\operatorname{tg}\varphi_R$	$\operatorname{tg}\varphi_L$
0,1	0,0990	0,1710
0,2	0,1920	0,2880
0,3	0,2730	0,3570
0,4	0,3360	0,3840
0,5	0,3750	0,3750
0,6	0,3840	0,3360
0,7	0,3570	0,2730
0,8	0,2880	0,1920
0,9	0,1710	0,0990

Съ помощью этихъ чиселъ можно построить углы φ_R и φ_L, а также ими можно воспользоваться для опредѣленія линій вліянія для всѣхъ опорныхъ моментовъ **). Для каждаго опорнаго момента достаточно построить тѣ двѣ вѣтви линіи вліянія, которыя принадлежатъ обоимъ пролетамъ, смежнымъ съ разсматриваемой опорой. Такъ напр. линію вліянія для количества M_r необходимо построить только отъ опоры $r-1$ до $r+1$.

Теперь всѣ линіи вліянія для M и Q можно построить по спо-

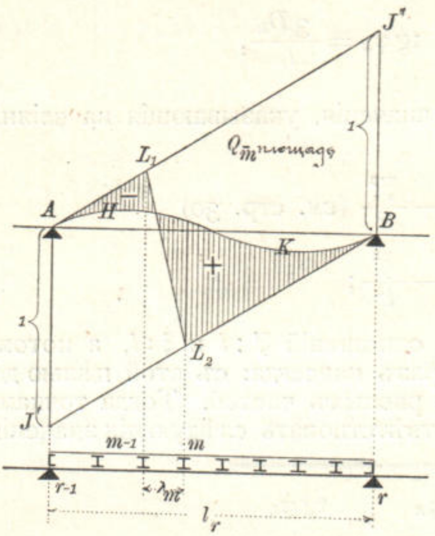
---

*) Если бы l_r былъ бы пролетомъ для балки, горизонтально задѣланной обоими концами, то, по стр. 29, прямую $A'B'$ слѣдовало бы проводить черезъ конечныя точки ординатъ D_L, D_R (вмѣсто ординатъ Y_L, Y_R).

**) Или можно опредѣлить L' на фиг. 48 съ помощью значенія $\eta'_L = k\operatorname{tg}\varphi_L$, гдѣ k цѣлое число. Третій способъ будетъ описанъ въ № 25.

собу, который былъ описанъ раньше въ выпускѣ IX. По этому способу требуется предварительное построенiе линiи влiянiя для выраженiя $\frac{1}{l_r}\left(M_r - M_{r-1}\right)$ — т. е. кривой $AHKB$ на фиг. 46 d и 47.

a. *Площадь влiянiя для перерѣзывающей силы въ панели* λ_m, фиг. 47.



Фиг. 47.

Мы имѣемъ выраженiе

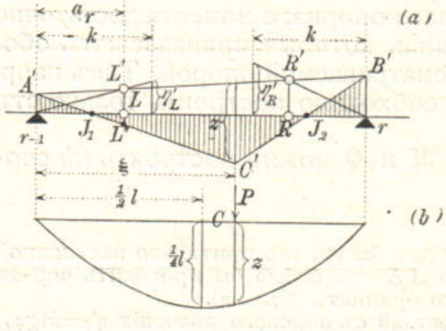
$$(19) \qquad Q_m = Q_{om} + \frac{M_r - M_{r-1}}{l_r},$$

гдѣ Q_{om} означаетъ перерѣзывающую силу для того случая, когда AB представляетъ простую балку. Линiя влiянiя для Q_{om} состоитъ изъ трехъ прямыхъ AL_1, L_1L_2, L_2B и опредѣляется отрѣзками $\overline{AJ'} = 1$ и $\overline{BJ''} = 1$; если къ площади влiянiя для Q_{om} прибавить площадь влiянiя для количества $(M_r - M_{r-1}) : l_r$, то заштрихованная на фигурѣ площадь представитъ площадь влiянiя для Q_m.

b. *Площадь влiянiя для момента* M_m. Для того чтобъ получить площадь влiянiя для M_m слѣдуетъ воспользоваться (при неравныхъ панеляхъ) уравненiемъ

$$(20) \qquad M_m = M_{om} + M_r + \frac{M_r - M_{r-1}}{l_r}\, x_m,$$

съ помощью котораго искомая площадь составляется изъ площадей влiянiя для момента M_{om} для простой балки, для момента M_r и для количества $(M_r - M_{r-1}) : l_r$; или же можно построить для разныхъ положенiй груза $P = 1$ площадь моментовъ $rB'C'A'r-1$ (фиг. 48), по которой опредѣляется влiянiе силы P для всѣхъ сѣченiй пролета l_r. Эта площадь строится съ помощью значенiй $\operatorname{tg}\varphi_L$, $\operatorname{tg}\varphi_R$ и съ помощью высоты z простой площади моментовъ $A'C'B'$. При этомъ z получается какъ ордината параболы, стрѣлка которой $= 0{,}25\, l_r$.



Фиг. 48.

Когда всѣ панели имѣютъ одну и ту же длину λ, то слѣдуетъ воспользоваться уравненiемъ:

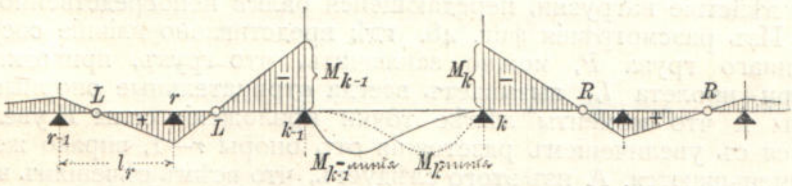
$$\frac{M_m}{\lambda} = \frac{M_{m-1}}{\lambda} + Q_m\,, \tag{21}$$

тогда площади вліянія для $M : \lambda$ строятся съ помощью площадей вліянія для Q послѣдовательно, начиная съ площади вліянія для $M_r : \lambda$.

c. *Вліяніе грузовъ, расположенныхъ внѣ разсматриваемаго пролета.* Когда требуется опредѣлить вліяніе нагрузки, лежащей на пролетѣ l_r, на моменты и перерѣзывающія силы для остальныхъ пролетовъ, то для этого необходимо найти съ помощью линій вліянія опорные моменты M_{k-1} и M_k и построить затѣмъ съ помощью постоянныхъ точекъ L и соотвѣтственно R линіи моментовъ для не нагруженныхъ пролетовъ. См. фиг. 49, а также изслѣдованіе на стр. 75, выпускъ IX. Для перерѣзывающихъ силъ въ не нагруженномъ пролетѣ l_r примѣняется формула

$$Q = \frac{1}{l_r}\left(M_r - M_{r-1}\right). \tag{22}$$

Поэтому количество Q одно и тоже для всѣхъ сѣченій пролета l_r.

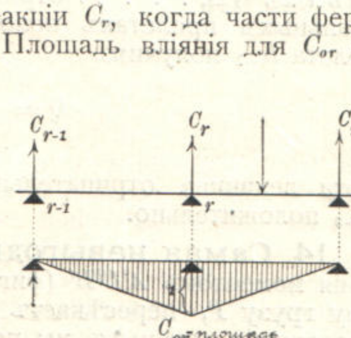


Фиг. 49.

d. *Сопротивленія опоръ.* Реакція C_r опоры r выражается (по стр. 68, выпускъ IX) такой формулой:

$$C_r = C_{or} + \frac{M_{r-1} - M_r}{l_r} + \frac{M_{r-1} - M_r}{l_{r+1}}, \tag{23}$$

гдѣ C_{or} представляетъ то значеніе реакціи C_r, когда части фермы l_r и l_{r+1} были бы простыми балками. Площадь вліянія для C_{or} выражается треугольникомъ съ высотой $= 1$; такимъ образомъ линія вліянія для C_r опредѣляется площадью треугольника совмѣстно съ площадями вліянія для количествъ $(M_r - M_{r-1}) : l_r$ и $(M_{r+1} - M_r) : l_{r+1}$, которыми мы пользовались раньше. Эту линію надо построить только между опорами $(r-1)$ и $(r+1)$. Вліяніе грузовъ, лежащихъ лѣвѣе $(r-1)$ и правѣе $(r+1)$, изслѣдуется съ помощью уравненія



Фиг. 50.

$$C_r = \frac{M_{r-1} - M_r}{l_r} + \frac{M_{r+1} - M_r}{l_{r+1}},$$

причемъ количества M_{r-1}, M_r, M_{r+1}, опредѣляются по способу, описанному раньше подъ пунктомъ c.

---

§ 5.

Продолженіе. Вліяніе равномѣрно распредѣленной нагрузки.

13. Самая невыгодная нагрузка для перерѣзывающихъ силъ. При равномѣрно распредѣленной постоянной и временной нагрузкахъ опредѣленіе перерѣзывающихъ силъ, моментовъ и сопротивленій опоръ значительно упрощается. Возьмемъ балку съ постояннымъ поперечнымъ сѣченіемъ и разсмотримъ сначала дѣйствіе нагрузки, передающейся балкѣ непосредственно.

Изъ разсмотрѣнія фиг. 48, гдѣ представлено вліяніе сосредоточеннаго груза P, можно заключить, что грузъ, приходящійся внутри пролета l_r, вызываетъ всегда отрицательные опорные моменты и что моменты лѣвѣе точки приложенія силы P увеличиваются съ увеличеніемъ разстоянія отъ опоры $r-1$, вправо же отъ P—уменьшаются. А изъ этого слѣдуетъ, что всѣмъ сѣченіямъ влѣво отъ P соотвѣтствуетъ положительная перерѣзывающая сила Q, для всѣхъ сѣченій вправо отъ P—отрицательная Q.

Смотря по тому, что требуется получить для сѣченія C, фиг. 51 и 52, наибольшую перерѣзывающую силу, т. е. ${}_{max}Q$ или наибольшую отрицательную перерѣзывающую силу, т. е. ${}_{min}Q$, мы должны нагрузить участокъ x' или участокъ x. Нагрузка въ остальныхъ пролетахъ располагается, какъ показано на фиг. 51 и 52. Доказательство явствуетъ изъ разсмотрѣнія фиг. 49, гдѣ показано, что нагрузка пролета l_r вызываетъ въ пролетахъ l_{k-1}, l_{k-3}, ... и затѣмъ l_{k+2}, l_{k+4}, ... отрицательныя перерѣзывающія силы, а въ остальныхъ пролетахъ положительныя. Напр., для всѣхъ сѣченій пролета l_{k-1} получимъ

$$Q = \frac{M_{k-1} - M_{k-2}}{l_{k-1}},$$

а эта величина отрицательна, потому что M_{k-1} отрицательно и M_{k-2} положительно.

14. Самая невыгодная нагрузка для моментовъ. Линія моментовъ $A'C'B'$ (фиг. 48), соотвѣтствующая сосредоточенному грузу P, пересѣкаетъ ось $(r-1)r$ въ двухъ точкахъ J_1 и J_2, о положеніи которыхъ мы получимъ сужденіе путемъ изслѣдованія моментовъ для сѣченія L и R. Въ сѣченіи L (при $P=1$) вызывается моментъ

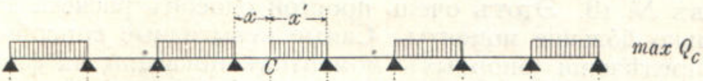
$$M_L = \overline{LL''} = \overline{L'L''} - \overline{L'L} = z\,\frac{a_r}{\xi} - \eta_L'\,\frac{a_r}{K},$$

причемъ $\eta_L' = k\,\mathrm{tg}\,\varphi_L$, т. е.

$$\eta_L' = \left(\frac{\xi'}{l} - \frac{\xi'^3}{l^3}\right) = \frac{k\xi'(l-\xi')(l+\xi')}{l^3} = \frac{kz(l+\xi')}{l^2}$$

и

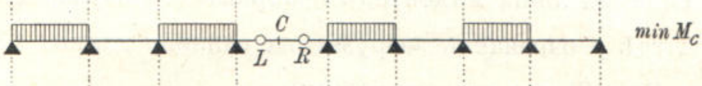
$$M_L = \frac{za_r}{\xi l}\left[l - \frac{\xi(l+\xi')}{l^2}\right]$$



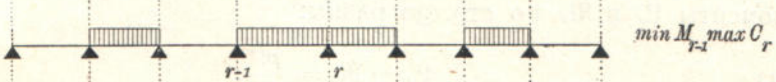
Фиг. 51.

Фиг. 52.

Фиг. 53.



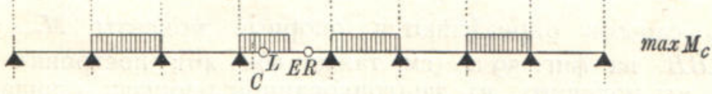
Фиг. 54.



Фиг. 55.

Фиг. 56.

Фиг. 57.



Фиг. 58.

Такъ какъ

$$\left[\frac{\xi(l+\xi')}{l}\right]_{max} = l,$$

то моментъ M_L, вызываемый грузомъ P, будетъ всегда положительнымъ, т. е. *нулевая точка J_1 должна во всякомъ случаѣ лежать лѣвѣе постоянной точки L*; точно также можно доказать, что нулевая точка J_2 должна лежать на участкѣ Rr.

Для сѣченій между постоянными точками L и R получаются всегда при нагрузкѣ разсматриваемаго пролета моменты *положительные*, а на основаніи этого важнаго правила и съ помощью фигуры 49 имѣемъ возможность вычертить безъ дальнѣйшихъ объясненій различные способы нагрузки, показанные на фиг. 53 и 54.

Чтобы получить ${}_{max}M$ и ${}_{min}M$ для сѣченія C, лежащаго внѣ участка LR (напр. для сѣченія влѣво отъ L), требуется неполная нагрузка въ данномъ пролетѣ, фиг. 57 и 58. Здѣсь каждому сѣченію C соотвѣтствуетъ опредѣленный раздѣлъ нагрузки E, напр. сѣченію J_1 на фиг. 48 соотвѣтствуетъ раздѣлъ нагрузки C; отыскиваніе этихъ раздѣловъ становится впрочемъ всегда излишнимъ, потому что линіи количествъ ${}_{max}M$ и ${}_{min}M$ для сѣченій внѣ участка LR можно построить также безъ опредѣленія раздѣловъ нагрузки, какъ это будетъ показано въ № 17. *Можно даже совсѣмъ не производить точнаго вычисленія моментовъ для сѣченій между постоянными точками и сосѣдними опорными точками; достаточно принять, что линія моментовъ (какъ для ${}_{min}M$, такъ и для ${}_{max}M$) между постоянной точкой и сосѣдней опорой—прямая*: см. численный примѣръ въ № 18. Этотъ очень простой способъ расчета даетъ намъ нѣсколько бо́льшіе моменты. Самые невыгодные способы загрузки при опредѣленіи опорныхъ моментовъ показаны на фиг. 55 и 56; при этомъ расположеніи нагрузки получаются также крайнія значенія для опорнаго сопротивленія C_r.

Для опредѣленія крайнихъ значеній Q, M, C достаточно изслѣдовать, какъ и въ № 12, вліяніе нагрузки одного пролета.

15. Полная равномѣрная загрузка одного пролета. Простая линія моментовъ изображается параболой со стрѣлкой $\frac{pl^2}{8}$, гдѣ p означаетъ нагрузку на единицу длины. Статическіе моменты $\mathfrak{L}_o$ и $\mathfrak{R}_o$ по стр. 30 равны:

$$\mathfrak{L}_o = \mathfrak{R}_o = \frac{pl^4}{12}, \tag{1}$$

поэтому получимъ

$$D_L = D_R = -\frac{2}{l^2} \cdot \frac{pl^4}{24} = -\frac{pl^2}{12}. \tag{2}$$

Этимъ самымъ опредѣляются опорные моменты $M_{r-1} = \overline{AA'}$ и $M_r = \overline{BB'}$ на фиг. 59 a (см. также фиг. 46); построивъ параболу $A'CB'$ мы получимъ въ заштрихованной площади площадь моментовъ для пролета AB. Для построенія этой параболы проводимъ $CD \parallel A'B'$ и дѣлимъ какъ CD такъ и $B'D$ на одинаковое число равныхъ частей. Точки пересѣченія вертикалей, проходящихъ черезъ точки дѣленія 1, 2, съ прямыми, соединяющими C съ точками дѣленія $1'$, $2'$, принадлежатъ параболѣ. Точно также получается и другая вѣтвь параболы $A'C$. Моменты, найденные подобнымъ путемъ, можно обозначить буквой M_p.

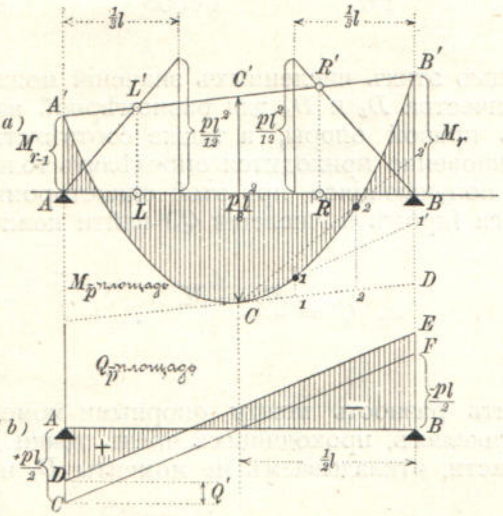
Для перерѣзывающихъ силъ имѣетъ мѣсто уравненіе

$$Q_p = Q_o + \frac{M_r - M_{r-1}}{l}. \tag{3}$$

Перерѣзывающія силы Q_o, соотвѣтствующія отдѣльной балкѣ AB, какъ извѣстно, равны ординатамъ прямой CF (фиг. 59 b), которая отсѣкаетъ на опорныхъ вертикаляхъ отрѣзки $+\frac{pl}{2}$; для опредѣленія же величинъ Q надо перемѣстить эту прямую по вертикальному направленію на величину

$$Q' = \frac{M_r - M_{r-1}}{l}.$$

На фиг. 59 a предположено, что $M_r > M_{r-1}$, поэтому Q' отрицательно.



Фиг. 59.

16. Неполная равномѣрная загрузка одного пролета. Пусть нагрузка занимаетъ участокъ ξ' у правой опоры, фиг. 60. Такъ какъ линія количествъ η_R представляетъ линію вліянія для D_L, то тогда по уравн. 18, стр. 40, получимъ:

(4) $$-D_L = p\int_0^{\xi'} \eta_R dx = \frac{pl}{3}\int_0^{\xi'}\left(\frac{x}{l} - \frac{x^3}{l^3}\right)dx = \frac{pl^2}{12}\cdot\omega_L, \text{ гдѣ}$$

(5) $$\omega_L = \frac{\xi'^2}{l^2}\left(2 - \frac{\xi'^2}{l^2}\right),$$

т. е. величина эта не зависитъ отъ пролета, а зависитъ только отъ отношенія $\xi' : l$. Для $\xi' : l$ имѣемъ $\omega_L = 1$, а отсюда слѣдуетъ, что количество ω_L, соотвѣтствующее нагрузкѣ участка ξ', сложенное съ количествомъ ω_L, соотвѣтствующимъ нагрузкѣ участка $\xi = l - \xi'$, равняется 1. Относительно опредѣленія количества $D_R = -\frac{pl^2}{12}\omega_R$ надо замѣтить, что количество ω_R для нагрузки, принятой на фиг. 60 b, равняется количеству ω_L для нагрузки, занимающей тоже протяженіе ξ', но начиная съ лѣвой опоры; а потому построивъ линію количествъ ω_L, мы можемъ легко получить значенія ω_R по способу, указанному на фиг. 60 b. Такимъ образомъ найдемъ:

для $\xi' : l = 0{,}1$,	$\omega_L = 0{,}0199$,	$\omega_R = 0{,}0361$
0,2	0,0784	0,1296
0,3	0,1719	0,2601
0,4	0,2944	0,4096
0,5	0,4375	0,5625
0,6	0,5904	0,7056
0,7	0,7399	0,8281
0,8	0,8704	0,9216
0,9	0,9639	0,9801
1,0	1,0000	1,0000

Съ помощью этихъ численныхъ значенiй можно весьма быстро вычислить количества D_L и D_R для равномѣрной нагрузки, простирающейся отъ правой опоры, а также соотвѣтствующiе опорные моменты. Обыкновенно приходится опредѣлять только *перерѣзывающiя силы* Q, получающiяся при этой односторонней нагрузкѣ, а также требуется (кромѣ вычисленiя Q_0) найти количество

$$Q' = \frac{M_r - M_{r-1}}{l},$$

т. е. опредѣлить разность между опорными моментами. Съ этой цѣлью на вертикаляхъ, проходящихъ чрезъ точки дѣленiя пролета на 3 равныя части, откладываемъ не моменты D_L и D_R, а отрѣзки

(6) $$h_L = D_L : \frac{pl^2}{12\,e} \text{ и соотвѣтственно } h_R = D_R : \frac{pl^2}{12\,e}, \text{ а именно}$$

$$h_L = e\omega_L \quad \text{и соотвѣтственно } h_R = e\omega_R\,.$$

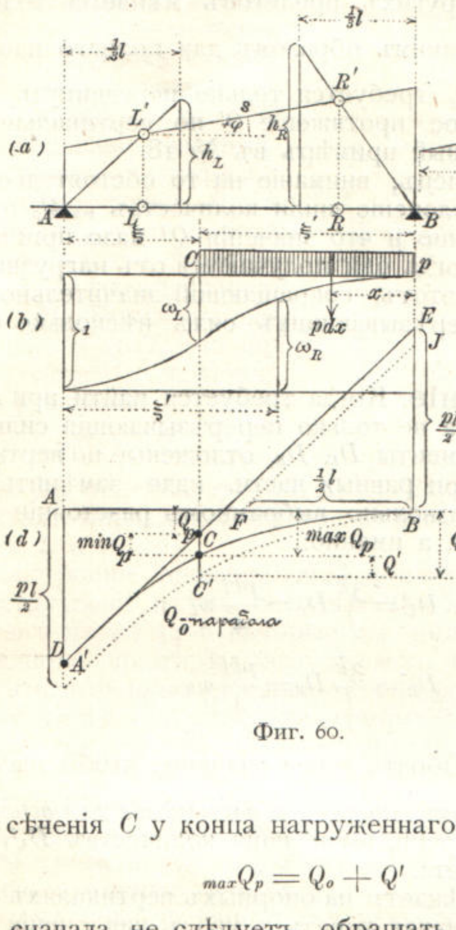
гдѣ e означаетъ протяженiе произвольное, но выраженное, разумѣется, круглымъ числомъ. Количества h_L и h_R не зависятъ отъ длины l разсматриваемаго пролета; они должны быть вычислены разъ навсегда и тогда могутъ быть примѣнены къ изслѣдованiю всѣхъ пролетовъ.

Теперь доводимъ до пересѣченiя въ точкахъ L', R' вертикали постоянныхъ точекъ съ тѣми прямыми, которыя соединяютъ концы отрѣзковъ h_L и h_R съ сосѣдними опорами; черезъ L', R' проводимъ прямую s; такъ какъ эта прямая s отсѣкаетъ на опорныхъ вертикаляхъ величины опорныхъ моментовъ, дѣленныхъ на $\frac{pl^2}{12e}$, то для угла наклоненiя прямой s найдемъ выраженiе

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{12\,e}{pl^2} \cdot \frac{M_r - M_{r-1}}{l},$$

откуда получаемъ (фиг. 60 c)

$$Q' = -\frac{pl^2}{12e} \operatorname{tg}\varphi \ ^{*)}.$$



Фиг. 60.

Теперь для сѣченія C у конца нагруженнаго участка находимъ

$$_{max}Q_p = Q_o + Q'$$

(при этомъ сначала не слѣдуетъ обращать вниманіе на нагрузку остальныхъ панелей); здѣсь $Q_o = \frac{p\xi'^2}{2l}$ означаетъ перерѣзывающую силу для сѣченія C отдѣльной балки AB, т. е. ординату той параболы BA' (фиг. 60 d), вершина которой лежитъ у B, и которая отсѣкаетъ на вертикали точки A отрѣзокъ $\overline{AA'} = \frac{pl}{2}$.

Такъ какъ $_{min}Q_p$ вызывается при нагрузкѣ только участка ξ и такъ какъ

$$_{min}Q_p + {}_{max}Q_p = Q_p,$$

т. е. равно перерѣзывающей силѣ при полной загрузкѣ пролета AB,

*) Знакъ минусъ здѣсь необходимъ, потому что опорные моменты отрицательны и потому что $M_r > M_{r-1}$, если только φ положительно.

то мы найдемъ, что ${}_{min}Q_p$ равняется вертикальному разстоянію линіи количествъ ${}_{max}Q_p$ отъ прямой DE; эта прямая получается, проводя изъ F — середины пролета AB прямую FJ, отсѣкающую ординату $\overline{BJ} = \frac{1}{2} pl$, и затѣмъ прочертивъ $DE \parallel FJ$.

При загрузкѣ другихъ пролетовъ мѣняется только значеніе $Q' = \frac{1}{l}\left(M_r - M_{r-1}\right)$; такимъ образомъ для полнаго изображенія количествъ ${}_{max}Q_p$ и ${}_{min}Q_p$ требуется только передвинуть прямыя DE и AB на опредѣленное протяженіе Q' по вертикальному направленію. Сравни численный примѣръ въ № 18.

Обратимъ, наконецъ, вниманіе на то обстоятельство, что въ среднихъ панеляхъ уклоненіе линіи количествъ ${}_{max}Q_p$ отъ параболы Q_0 совершенно ничтожно и что значенія Q' надо принимать во вниманіе только тогда, когда они получаются отъ нагрузки въ другихъ пролетахъ. Способъ этотъ, сокращающій значительно вычисленія, доставляетъ для перерѣзывающихъ силъ нѣсколько бóльшія значенія.

17. Продолженіе. Когда требуется найти при неполной нагрузкѣ одного пролета не только перерѣзывающія силы, но и моменты *), то тогда моменты D_L, D_R, отложеные по вертикалямъ, дѣлящимъ пролетъ на три равныя части, надо замѣнить моментами, отложенными въ произвольно выбранномъ разстояніи k отъ опорныхъ точекъ (фиг. 61), а именно:

$$D_L' = \frac{3k}{l} D_L = \frac{pkl}{4} \omega_L \quad \text{и}$$

$$D_R' = \frac{3k}{l} D_R = \frac{pkl}{4} \omega_R \,,$$

причемъ для k надо выбрать такое значеніе, чтобы значеніе для $\frac{pkl}{4}$ получилось въ круглыхъ числахъ и *одинаковое для всѣхъ пролетовъ*, дабы избѣгнуть повторенія вычисленія количествъ D_L', D_R' для каждаго отдѣльнаго пролета.

Прямая $L'R'$ отсѣкаетъ на опорныхъ вертикаляхъ опорные моменты M_r, M_{r-1}; обозначая черезъ φ уголъ наклоненія прямой $L'R'$, найдемъ, что

$$Q' = -- 1 \cdot \operatorname{tg} \varphi \,,$$

а теперь уже легко опредѣлить предѣльныя значенія ${}_{max}Q_p$, ${}_{min}Q'$ такимъ же точно способомъ, какъ это было сдѣлано раньше.

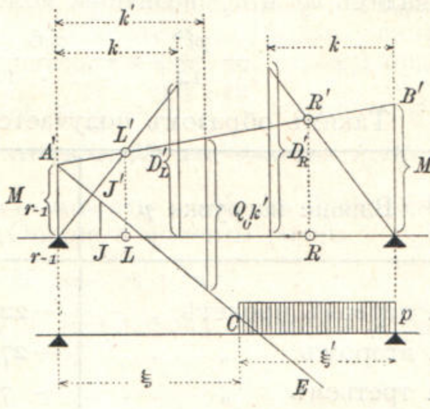
Нагрузка участка ξ' вызываетъ въ опредѣленномъ сѣченіи J, лежащемъ влѣво отъ постоянной точки L, моментъ ${}_{min}M_p$; — мы при этомъ опять не обращаемъ вниманія на нагрузку на другихъ пролетахъ. Линія моментовъ для части балки ξ, содержащей сѣченіе J, представляется прямой $A'E$, опредѣляемой опорнымъ моментомъ и тѣмъ условіемъ, что прямыя $A'B'$ и $A'E$ должны отсѣчь на верти-

---

*) Т. е. когда нельзя ограничиться приблизительнымъ расчетомъ, рекомендуемымъ нами для опредѣленія моментовъ. (См. стр. 46).

кали, проведенной на произвольномъ разстояніи k' отъ A', величину момента $Q_0 k'$. Количествомъ Q_0 мы уже пользовались для опредѣленія ${}_{max}Q_p$, для величины же k' надо взять цѣлое число; такимъ образомъ прямую $A'E$ можно легко построить. Когда временная нагрузка перемѣстится дальше на длину $d\xi$, то моментъ JJ' въ сѣченіи J останется безъ перемѣны, такъ какъ точка C служитъ раздѣломъ нагрузки для сѣченія J. Линія моментовъ $A'E$ въ первое мгновеніе дальнѣйшаго передвиженія нагрузки вращается около точки J', а отсюда слѣдуетъ, что прямыя $A'E$, соотвѣтствующія различнымъ ξ', обертываютъ линію моментовъ ${}_{min}M_p$. Когда эта линія построена, то ${}_{max}M_p$ отъ нагрузки на участкѣ ξ найдется при помощи уравненія

$${}_{max}M_p + {}_{min}M_p = M_p \,.$$



Фиг. 61.

Величина же M_p опредѣляется по № 15. Вліяніе нагрузки на остальныхъ пролетахъ опредѣляется тогда по фиг. 49 съ помощью постоянныхъ точекъ L и R.

Хотя построеніе точныхъ линій моментовъ и не представляетъ никакихъ затрудненій, тѣмъ не менѣе приближенный способъ, который описанъ въ № 14 и который мы примѣнимъ въ нижеслѣдующемъ численномъ примѣрѣ, заслуживаетъ большаго предпочтенія. Надо замѣтить, что допущеніе равномѣрно распредѣленной нагрузки основывается всегда на довольно грубыхъ приближеніяхъ, и что слишкомъ точный расчетъ не былъ бы здѣсь у мѣста.

18. Численный примѣръ. На листѣ чертежей 2 изслѣдована по описанному раньше способу балка въ 4 пролета. Боковые пролеты $l_1 = 10$ м., средніе $l = 12$ м. Постоянная нагрузка $g = 0{,}9$ т. на пог. метръ. временная $p = 3{,}6$ т.

Проводимъ сначала (фиг. 62) черезъ точки дѣленія пролетовъ на три равныя части вертикали d и вертикали v, смежныя съ опорами, и опредѣляемъ (по стр. 37) постоянныя точки L_1, L_2, L_3, L_4. Точки R также даны, такъ какъ пролеты симметричны.

Опредѣлимъ теперь на фиг. 62 опорные моменты для того случая, когда весь первый пролетъ несетъ нагрузку p, а остальные пролеты не нагружены. Ломанная съ красной штриховкой представляетъ соотвѣтствующій этой нагрузкѣ многоугольникъ количествъ M; онъ проходитъ черезъ постоянныя точки L_1, R_2, R_3, R_4 и опредѣляется тѣмъ условіемъ, что прямая, проходящая черезъ точку опоры 1 и черезъ точку R_1', должна отсѣкать на вертикали d_1 величину момента

$$-\frac{p l_1^2}{12} = -\frac{3{,}6 \cdot 10^2}{12} = -30{,}00 \text{ тм.}$$

Результаты этого нанесены на фиг. 62.

Ломанная линія, заштрихованная синимъ, доставляетъ опорные моменты для того случая, когда загруженъ сплошь только второй пролетъ; эта линія проходитъ черезъ постоянныя точки L_1, R_3, R_4 и опредѣляется тѣмъ условіемъ, что прямыя, проведенныя изъ опоръ 1 и 2 въ точки L_2' и соотвѣтственно R_2', должны отсѣкать на вертикаляхъ d_2' и d_2'' величины моментовъ

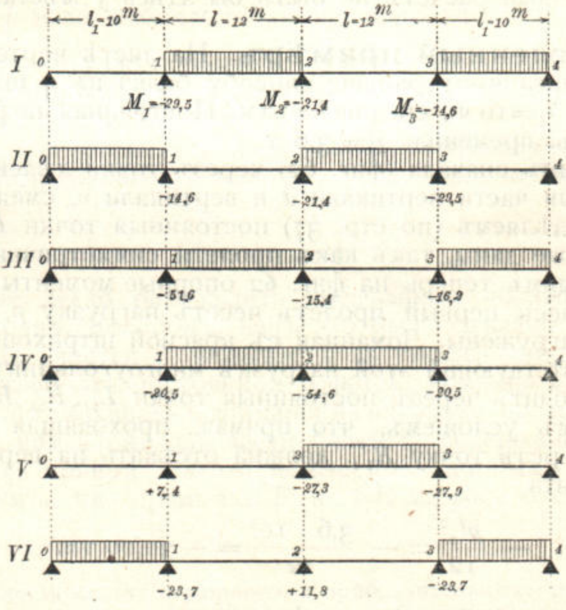
$$-\frac{pl^2}{12} = -\frac{3{,}6 \cdot 12^2}{12} = -43{,}20 \text{ тм.}$$

Такимъ образомъ получается слѣдующая таблица:

Вліяніе нагрузки p	Опорные моменты		
	M_1	M_2	M_3
на первомъ пролетѣ . . .	— 22,06 тм.	+ 5,92 тм.	— 1,61 тм.
на второмъ „ . . .	— 27,90 „	— 27,28 „	+ 7,44 „
на третьемъ „ . . .	+ 7,44 „	— 27,28 „	— 27,90 „
на четвертомъ „ . . .	— 1,61 „	+ 5,92 „	— 22,06 „
Всего . .	— 44,13 „	— 42,72 „	— 44,13 тм.

Съ помощью этихъ значеній построены на фиг. 63 наибольшіе отрицательные и положительные моменты ($_{min}M_p$, $_{max}M_p$). Это сдѣлано сначала для случаевъ нагрузки, обозначенныхъ на фиг. 68 цифрами I, II, III, IV.

Случай нагрузки I вызываетъ въ участкѣ балки L_1R моменты



Фиг. 68.

${}_{min}M_p$ и въ участкѣ L_2R_2 моменты ${}_{max}M_p$. Опорные моменты равняются:

$$M_1 = -27{,}90 - 1{,}61 = -29{,}5 \text{ тм.}$$
$$M_2 = -27{,}28 + 5{,}92 = -21{,}4 \text{ тм.};$$

этими моментами опредѣляется на фиг. 63 ломанная линія I I. Красная прямая I представляетъ линію моментовъ ${}_{min}M_p$ для участка L_1R_1; отъ синей линіи I отложены (согласно фиг. 59, стр. 47) ординаты параболы (I'), стрѣлка которой $= \frac{pl^2}{8} = \frac{3{,}6 \cdot 12^2}{8} = 64{,}8$ тм. Эта парабола представитъ линію моментовъ ${}_{max}M_p$ для участка L_2R_2.

Случай нагрузки II вызываетъ моменты ${}_{max}M_p$ на протяженіи L_1R_1 и ${}_{min}M_p$ на протяженіи L_2R_2. Опорные моменты равны

$$M_1 = -14{,}6 \text{ тм.}, \quad M_2 = -21{,}4 \text{ тм.};$$

эти моменты опредѣляютъ прямыя II, II. Стрѣлка параболы II' равняется $\frac{pl_1^2}{8} = \frac{3{,}6 \cdot 10^2}{8} = 45{,}0$ тм.

Случай нагрузки III вызываетъ наибольшій отрицательный опорный моментъ:

$${}_{min}M_1 = -22{,}06 - 27{,}90 - 1{,}61 = -51{,}6 \text{ тм.};$$

такимъ образомъ опредѣлена также (приближенная) линія моментовъ ${}_{min}M_p$ для участка R_1L_2; эта линія состоитъ изъ прямыхъ III.

Случаю нагрузки IV соотвѣтствуетъ наибольшій отрицательный опорный моментъ

$${}_{min}M_2 = -2 . 27{,}28 = -54{,}6 \text{ тм.};$$

этой величиной воспользуемся для проведенія прямой IV, которая представитъ линію моментовъ ${}_{min}M_p$ для участка $R_2 2$.

Случаи нагрузки V и VI вызываютъ наконецъ

$${}_{max}M_1 = +7{,}4 \text{ тм.}$$

$$\text{и соотвѣтственно } {}_{max}M_2 = +2 . 5{,}92 = +11{,}8 \text{ тм.};$$

эти значенія послужатъ для построенія приближенныхъ линій моментовъ ${}_{max}M_p$, а именно V и VI для участковъ R_1L_2 и соотвѣтственно $R_2 2$.

Моменты, зависящіе отъ постоянной нагрузки $g = 0{,}9 = \frac{1}{4}p$, построены отдѣльно (фиг. 64); они опредѣляются опорными моментами

$$M_2 = -\frac{g}{p}\, 42{,}72 = -10{,}7 \text{ тм.}, \quad M_3 = -\frac{g}{p}\, 44{,}13 = -11{,}0 \text{ тм.}$$

и стрѣлкою параболы

$$\frac{gl^2}{8} = 16{,}20 \text{ тм.}, \quad \frac{gl_1^2}{8} = 11{,}25 \text{ тм.}$$

Перерѣзывающія силы $_{max}Q_p$ и $_{min}Q_p$ *въ боковомъ пролетѣ* опредѣляются по способу, указанному въ № 16. Обозначенный тамъ буквой e отрѣзокъ взятъ въ 10 м., поэтому высоты $h_R = e\omega_R$, соотвѣтствующія точкамъ дѣленія 0, 1, 2, 3, 4 (на фиг. 66 b), получаются равными:

10,00 м., 9,22 м., 7,06 м., 4,10 м., 1,30 м. *);

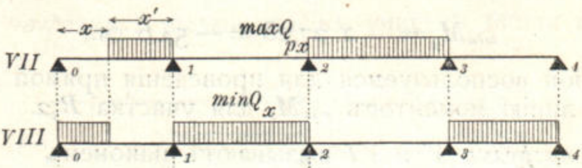
эти значенія отложены по вертикали d_1, проходящей черезъ точку дѣленія пролета на 3 равныя части; такъ какъ L_1 совпадаетъ съ 0, то эти значенія могутъ служить для опредѣленія лучей 00′, 01′, 02′, 03′, 04′. Лучи же эти отсѣкаютъ на вертикали, проведенной отъ точки опоры 0 въ разстояніи

$$\frac{pl_1^2}{12\,e} = \frac{3{,}6 \cdot 10^2}{12 \cdot 10} = 3{,}0 \text{ т.},$$

величины силъ Q', которыя надо вычесть изъ ординатъ параболы количествъ Q_0.

Полученная такимъ образомъ на фиг. 66 линія количествъ $(Q_0 - Q')$ (съ черной штриховкой) переносится на фиг. 67 а; эта линія, отнесенная къ прямой VII съ синей штриховкой, даетъ намъ перерѣзывающія силы $_{max}Q_p$. Для полученія $_{max}Q_p$ необходимо было нагрузить еще весь третій пролетъ, фиг. 69 (случай VII), а вслѣдствіе этого перерѣзывающія силы въ первомъ пролетѣ увеличиваются на величину

$$\frac{M_1}{l_1} = + \frac{7{,}44}{10} + 0{,}75 \text{ т.}$$



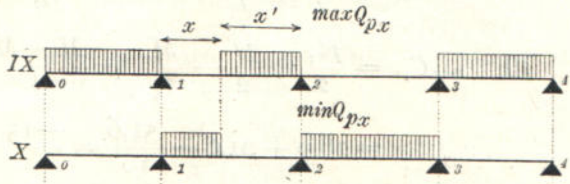
Фиг 69

Для полученія $_{min}Q_p$ въ сѣченіи x требуется нагрузить не только протяженіе x (фиг. 69), но также полностью второй и четвертый пролеты, причемъ этимъ полнымъ нагрузкамъ соотвѣтствуетъ опорный моментъ $M_1 = -29{,}5$ тм.; поэтому при нагрузкѣ участка x къ перерѣзывающей силѣ придется добавить величину $\frac{M_1}{l_1} = -2{,}95$ т. Ординаты линіи съ черной штриховкой, взятыя до прямой VIII съ красной штриховкой (опредѣленіе которой понятно изъ фиг. 67 а), даютъ намъ такимъ образомъ наибольшія отрицательныя перерѣзывающія силы $_{min}Q_p$.

Для количествъ Q', соотвѣтствующихъ по фиг. 60 (стр. 49)

*) Ср. числа ω_R на стр. 48. Въ данномъ случаѣ пользуемся значеніями для $\xi' : l = 1{,}0;\ 0{,}8;\ 0{,}6;\ 0{,}4;\ 0{,}2$.

второму пролету, получаются столь небольшія величины, что приходится сохранить только параболу количествъ Q_o. Проведеніе прямыхъ IX и X сдѣлано слѣдующимъ образомъ, сообразно со случаями нагрузокъ IX и X, показанныхъ на фиг. 70.



Фиг. 70.

Нагрузка перваго и четвертаго пролетовъ вызываетъ $M_1 = -23{,}7$ тм. и $M_2 = +11{,}8$ тм. и даетъ такимъ образомъ для втораго пролета перерѣзывающую силу $\frac{M_2 - M_1}{l} = +3{,}0$ тм.

Отъ нагрузки на третьемъ пролетѣ получается $M_1 = +7{,}4$, $M_2 = -27{,}3$ и $Q = \frac{M_2 - M_1}{l} = -2{,}9$ т. Дальнѣйшее слѣдуетъ изъ фиг. 67 b. Обѣ прямыя VIII и X параллельны между собой.

Перерѣзывающія силы отъ постоянной нагрузки построены на фиг. 65 для третьяго и четвертаго пролетовъ. Вліяніе опорнаго момента на третій пролетъ, т. е. величина $Q' = \frac{M_3 - M_2}{l} = \frac{-11{,}0 + 10{,}7}{12}$ настолько ничтожна, что можно воспользоваться прямо линіей количествъ Q_o. Это будетъ прямая, крайнія ординаты которой равняются $\pm \frac{gl}{2} = \pm 0{,}9 \cdot 6 = \pm 5{,}4$ т.

Линія перерѣзывающихъ силъ для четвертаго пролета будетъ также прямой съ крайними ординатами

$$+\frac{gl_1}{2} - \frac{M_3}{l_1} = +4{,}5 + 1{,}1 = +5{,}6 \text{ т.} \quad \text{и}$$

$$-\frac{gl_2}{2} - \frac{M_3}{l} = +4{,}5 + 1{,}1 = -3{,}4 \text{ т.}$$

Перерѣзывающія силы Q_g въ первомъ и во второмъ пролетахъ имѣютъ знаки, противоположные знакамъ четвертаго и третьяго пролетовъ. Такъ напр. линія количествъ Q_g имѣтъ на опорахъ 0 и 1 высоты $+3{,}4$ т. и соотвѣтственно $-5{,}6$ т.

Остается еще разсмотрѣть вычисленіе *сопротивленій опоръ* C_0, C_1, C_2. По уравненію

$$C_r = C_{or} + \frac{M_{r-1} - M_r}{l_s} + \frac{M_{r+1} - M_r}{l_{r+1}}$$

и послѣ подстановки значеній опорныхъ моментовъ, нанесенныхъ на фиг. 68, найдемъ слѣдующія выраженія:

a) вліяніе временной нагрузки:

случай нагрузки I $_{min}C_{0p}=\frac{M_1}{l_1}=-\frac{29{,}5}{10}=-2{,}95$ т.

" " II $_{max}C_{0p}=\frac{pl_1}{2}+\frac{M_1}{l_1}=18{,}0-\frac{14{,}6}{10}=+16{,}5$ т.

" " III $_{max}C_{1p}=\frac{pl_1}{2}+\frac{pl}{2}-\frac{M_1}{l_1}+\frac{M_2-M_1}{l}$

$$=18{,}0+21{,}6-\frac{51{,}6}{10}=\frac{-15{,}4+51{,}6}{12}$$

$$=+47{,}8 \text{ т.}$$

" " IV $_{max}C_{2p}=2\left(\frac{pl}{2}+\frac{M_1-M_2}{l}\right)$

$$=2\left(21{,}6+\frac{-20{,}5+54{,}6}{12}\right)=+48{,}9 \text{ т.}$$

" " V $_{min}C_{1p}=-\frac{M_1}{l_1}+\frac{M_2-M_1}{l}$

$$=-\frac{7{,}4}{10}+\frac{-27{,}3+7{,}4}{12}=-2{,}4 \text{ т.}$$

" " VI $_{min}C_{2p}=2\frac{M_1-M_2}{l}=2\frac{-23{,}7-11{,}8}{12}$

$$=-5{,}9 \text{ т.}$$

b) вліяніе постоянной нагрузки (по фиг. 65):

$C_{0g}=C_{4g}=+3{,}4$ т.; $C_{1g}=C_{3g}=+5{,}6+5{,}4=+11{,}0$ т.;
$C_{2g}=2\cdot 5{,}4=+10{,}8$ т.

Въ суммѣ получимъ для $_{min}C$:

$$_{min}C_0=-2{,}95+3{,}4=+0{,}45 \text{ т.}$$
$$_{min}C_1=-2{,}4+11{,}0=+9{,}6 \text{ т.}$$
$$_{min}C_2=-5{,}9+10{,}8=+4{,}9 \text{ т.}$$

Вліяніе неравномѣрнаго нагрѣванія балки. Разсмотримъ теперь ферму моста, нижній поясъ которой находится въ тѣни подъ полотномъ, а верхній выступаетъ надъ полотномъ и поэтому отъ дѣйствія солнечныхъ лучей получаетъ температуру на 15° выше, чѣмъ нижній поясъ. Опредѣлимъ опорные моменты, вызываемые этимъ неравномѣрнымъ нагрѣваніемъ, по способу, описанному въ № 11. Въ выраженіе

$$T_r=\frac{\varepsilon EJ(t_o-t_u)}{h} \quad \text{(уравн. 9, стр. 36)}$$

подставимъ вмѣсто $\frac{J}{h}$ значеніе, соотвѣтствующее наиболѣе напряженному сѣченію. Это неблагопріятное предположеніе (вмѣсто подстановки средняго значенія $\frac{J}{h}$) позволяетъ принять въ расчетъ могущія быть вредныя перемѣщенія опорныхъ точекъ.

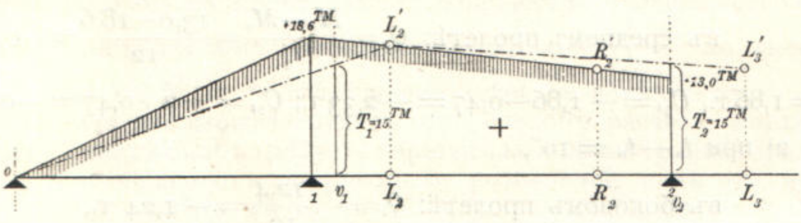
Наибольшій моментъ получается надъ опорой 2; онъ равняется $M_2 = M_{2\cdot p} + M_{2\cdot g} = -54{,}6 - 10{,}7 = -65{,}3$ тм.; при этомъ моментѣ и при допускаемомъ напряженіи $\sigma = 750$ к/см^2. $= 7500$ т/м^2. требуется моментъ сопротивленія

$$W = \frac{M}{\sigma} = \frac{65{,}3}{7500} = 0{,}0082 \text{ м.}^3,$$

поэтому при $J = \frac{1}{2} Wh$ $\left(\text{т. е. } \frac{J}{h} = 0{,}0041\right)$ и при $\varepsilon E = 240$ т/м^2. (для сварочнаго желѣза) найдемъ

$$T_1 = T_2 = 240 \;.\; 0{,}0041 \;.\; 15 = \text{около } 15 \text{ тм.}$$

Эти значенія надо отложить на фиг. 71 какъ ординаты на вертикаляхъ v_1, v_2, смежныхъ съ опорами; такимъ образомъ получимъ (по стр. 37) точки L_2' и L_3' искомаго многоугольника моментовъ M.



Фиг. 71

Такъ какъ балка симметрична, то, зная положеніе L_3', можемъ получить положеніе R_2' $(\overline{R_2 R_2'} = \overline{L_3 L_3'})$, а этимъ вполнѣ опредѣляется многоугольникъ M. Въ результатѣ получимъ:

$$M_{1t} = +18{,}6 \text{ тм.}, \quad M_{2t} = +13{,}0 \text{ тм.}$$

Такимъ образомъ дѣйствіе солнечныхъ лучей на верхній поясъ вызываетъ всюду положительные моменты. Сложивъ моменты M_p и M_g, построенные отдѣльно на листѣ чертежей 2, найдемъ для перваго пролета

$$_{max}(M_p + M_g) = 44{,}0 \text{ тм.}$$

и для втораго пролета

$$_{max}(M_p + M_g) = 44{,}7 \text{ тм.}$$

Прибавивъ сюда моменты M_t, полученные изъ фиг. 71, получимъ:

$$_{max}(M_p + M_g + M_t) = 53 \text{ тм. и соотвѣтственно } 60{,}5 \text{ тм.}$$

Слѣдовательно, ранѣе опредѣленное количество $_{max}M$ увеличивается отъ дѣйствія измѣненія температуры на 20% и соотвѣтственно на 35%.

Чтобы сдѣлать при опредѣленіи моментовъ ${}_{min}M$ наиболѣе неблагопріятное предположеніе, примемъ, что зимой верхній поясъ сильнѣе охлаждается, чѣмъ защищенный нижній. Разность температуръ сосчитаемъ въ 10°, т. е. примемъ, что

$$M_{1t} = -\frac{2}{3} \,.\, 18{,}6 = -12{,}4 \text{ тм.}, \; M_{2t} = -\frac{2}{3} \,.\, 13{,}0 \text{ тм.} = -8{,}7 \text{ тм.}$$

Наибольшія значенія опорныхъ моментовъ будутъ равняться тогда:

$$M_1 = -51{,}6 - 11{,}0 - 12{,}4 = -75 \text{ тм.};$$

$$M_2 = -65{,}3 - \;\; 8{,}3 = -74 \text{ тм.}$$ *);

такимъ образомъ моменты увеличиваются на 20% и соотвѣтственно на 13%.

Перерѣзывающія силы Q_t и сопротивленія опоръ C_t, вызываемыя неравномѣрнымъ нагрѣваніемъ балки, будутъ равняться:

1) при $t_o - t_u = 15°$,

$$\text{въ боковомъ пролетѣ: } Q_t = \frac{M_1}{l_1} = \frac{18{,}6}{10} = 1{,}86 \text{ т.},$$

$$\text{въ среднемъ пролетѣ: } Q_t = \frac{M_2 - M_1}{l_2} = \frac{13{,}0 - 18{,}6}{12} = -0{,}47 \text{ т.},$$

$$C_{0t} = 1{,}86 \text{ т.}, \; C_{1t} = -1{,}86 - 0{,}47 = -2{,}33 \text{ т.}; \; C_{2t} = +2 \,.\, 0{,}47 = +0{,}94 \text{ т.}$$

2) при $t_o - t_u = 10°$,

$$\text{въ боковомъ пролетѣ: } Q_t = -\frac{12{,}4}{10} = -1{,}24 \text{ т.},$$

$$\text{въ среднемъ пролетѣ: } Q_t = \frac{-8{,}7 + 12{,}4}{12} = +0{,}31 \text{ т.},$$

$$C_{0t} = -1{,}24 \text{ т.}; \; C_{1t} = +1{,}24 + 0{,}31 = +1{,}55 \text{ т.}; \; C_{2t} = -2 \,.\, 0{,}31 = -0{,}62 \text{ т.}$$

Надо обратить вниманіе на вліяніе измѣненія температуры на наименьшія значенія C. Значенія ${}_{min}C$, найденныя на стр. 56, обратятся въ слѣдующія:

$${}_{min}C_0 = +0{,}45 - 1{,}24 = -0{,}8 \text{ т.},$$

$${}_{min}C_1 = +9{,}6 - 2{,}33 = +7{,}3 \text{ т.},$$

$${}_{min}C_2 = +4{,}9 - 0{,}62 = +4{,}3 \text{ т.};$$

такимъ образомъ въ крайнихъ опорахъ получаются отрицательныя сопротивленія, которыя требуютъ устройства закрѣпленій концовъ балки съ кладкой **).

---

*) Принявъ этотъ моментъ въ основаніе для вычисленій количествъ $J:h$ и T, получили бы $J:h = 0{,}0048$ и $T = 17{,}3$ тм. Новаго опредѣленія M_{1t} и M_{2t} можно не дѣлать.

**) Отрицательныя опоры (скрѣпленіе съ кладкой) полезно дѣлать даже тогда, когда ${}_{min}C$ выражается небольшимъ положительнымъ числомъ.

Въ сдѣланныхъ вычисленіяхъ мы пренебрегали перемѣщеніями опорныхъ точекъ. Возможно это допустить въ фермахъ, лежащихъ на каменныхъ или на не очень высокихъ желѣзныхъ опорахъ и при надежномъ грунтѣ, если при этомъ сдѣлано достаточно неблагопріятное предположеніе относительно вліянія измѣненія температуры $t_o - t_u$.

---

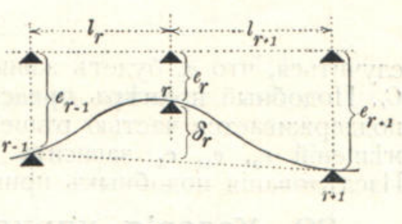
§ 6.

Ђалки на упругихъ опорахъ.

19.—До сихъ поръ мы предполагали, что разстояніе δ_r (фиг. 72), на которое перемѣщается точка опоры r относительно прямой, соединяющей опоры $r-1$ и $r+1$, было *задано*, т. е. раньше рѣчь была о томъ, чтобъ опредѣлить вліяніе перемѣщеній, полученныхъ изъ наблюденій или напередъ выбранныхъ, или же чтобъ узнать тѣ преимущества, которыя можно получить путемъ измѣненія взаимнаго расположенія высотъ опорныхъ точекъ, соотвѣтствующаго не напряженному состоянію. Вліяніе количества δ_r лучше всего опредѣляется тогда съ помощью моментовъ $T_r = -\frac{2EJ\delta_r}{l_r l_{r+1}}$ по способу, описанному въ № 11 *); затрудненій здѣсь не встрѣчается.

Значительно сложнѣе будетъ тотъ способъ расчета, когда при большемъ числѣ опоръ требуется принять во вниманіе вліяніе движенія опоръ, зависящаго отъ опорныхъ сопротивленій, какъ это, напримѣръ, можетъ имѣть мѣсто въ балкахъ, лежащихъ на очень высокихъ желѣзныхъ опорахъ, или въ главныхъ фермахъ плавучихъ мостовъ. Въ обоихъ взятыхъ случаяхъ вертикальное перемѣщеніе e_r опорной точки r (считаемое положительнымъ книзу) можно написать въ такой формѣ

(1) $$e_r = e'_r + \omega_r C_r,$$



Фиг. 72.

гдѣ e'_r означаетъ количество, не зависящее отъ сопротивленія опоры C_r; ω означаетъ пониженіе опорной точки отъ дѣйствія причины $C_r = 1$.

Если, напр., балка лежитъ въ r на стойкѣ, длина которой h_r, площадь поперечнаго сѣченія F_r, коэффиціентъ упругости E_r и t_r возвышеніе температуры для стойки, то будемъ имѣть

(2) $$e = -\varepsilon t_r h_r + \frac{C_r h_r}{E_r F_r}, \text{ или } e'_r = -\varepsilon t_r h_r \text{ и } \omega_r = \frac{h_r}{E_r F_r}.$$

---

*) Точный способъ для балки съ перемѣнными поперечными сѣченіями описанъ въ № 132 (выпускъ IX).

При этомъ мы пренебрегли сжимаемостью грунта и кладки основанія; эти явленія можно было бы принять во вниманіе путемъ надлежащаго увеличенія количества ω_r, но обыкновенно вліяніе это бываетъ ничтожнымъ.

Если же балка опирается въ точкѣ r на понтонъ (судно), то между опорнымъ сопротивленіемъ C_r, вызываемымъ какой либо нагрузкой, и измѣненіемъ e_r глубины погруженія понтона, взятой до приложенія нагрузки, существуетъ такая зависимость

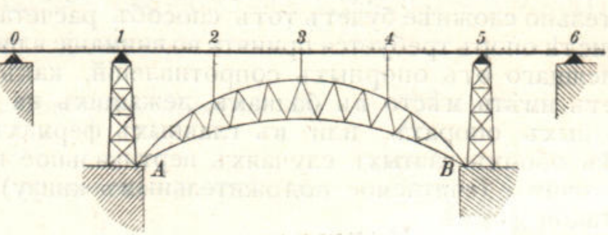
$$\gamma F_r e_r = C_r ,$$

гдѣ F_r означаетъ площадь поперечнаго сѣченія понтона на уровнѣ поверхности воды, а γ — вѣсъ единицы объема воды ($\gamma = 1$ т. въ 1 куб. метрѣ). При этомъ всегда возможно сдѣлать допущеніе, что F при увеличеніи глубины погруженія не измѣняется, т. е. что объемъ воды, вытѣсненный давленіемъ C_r равняется $F_r e_r$. Если же глубина погруженія увеличивается на величину e'_r отъ причины, не зависящей отъ C_r, напр., отъ значительнаго измѣненія въ вѣсѣ понтона, то точка опоры r перемѣстится въ общемъ на величину

(3) $$e_r = e'_r + \omega_r C_r, \text{ гдѣ } \omega_r = \frac{1}{\gamma F_r}.$$

Надо замѣтить еще, что опорная точка r берется по серединѣ понтона. Случай балки, опирающейся на борты понтона, мы разсмотримъ отдѣльно.

Уравненіемъ (1) ни въ коемъ случаѣ не исчерпываются возможныя соотношенія между перемѣщеніями e и силами C. Можетъ



Фиг. 73.

случиться, что e_2 будетъ зависѣть отъ сопротивленій многихъ опоръ C_r. Подобный примѣръ представляетъ фиг. 73. Балка 0 1 . . . 6 поддерживается частью рѣшеткой AB, поэтому каждое изъ перемѣщеній e_2, e_3, e_4 зависитъ отъ трехъ реакцій опоръ C_2, C_3, C_4. Изслѣдованія подобныхъ примѣровъ мы пока дѣлать не будемъ.

20. Условія упругости для балки съ постояннымъ поперечнымъ сѣченіемъ. Сошлемся на уравненія 7 и 8, выведенныя на стр. 36, и выразимъ сначала δ_r въ зависимости отъ e_{r-1}, e_r, e_{r+1}, фиг. 72.

Имѣемъ

$$\frac{e_r + \delta_r - e_{r-1}}{l_r} = \frac{e_{r+1} - (e_r + \delta_r)}{l_{r+1}}$$

и затѣмъ

$$(4)\qquad \frac{\delta_r(l_r+l_{r+1})}{l_r l_r} = \frac{e_{r-1}-e_r}{l_r} + \frac{e_{r+1}-e_r}{l_{r+1}},$$

членъ же N_r, зависящій отъ нагрузки, приметъ видъ

$$(5)\qquad N_r = -6\left(\frac{\mathfrak{L}_{or}}{l_r} + \frac{\mathfrak{R}_{o(r+1)}}{l_{r+1}}\right) - 3\varepsilon EJ(t_u - t_o)\frac{l_r+l_{r+1}}{h}$$

$$-6EJ\left[\frac{e_{r-1}}{l_r} - \frac{e_r(l_r+l_{r+1})}{l_r l_{r+1}} + \frac{e_{r+1}}{l_{r+1}}\right].$$

Положимъ теперь $e_r = e'_r + \omega_r C_r$ и (по уравн. 23, стр. 43)

$$(6)\qquad C_r = C_{0r} + \frac{M_{r-1}}{l_r} - \frac{M_r(l_r+l_{r+1})}{l_r l_{r+1}} + \frac{M_{r+1}}{l_{r+1}},$$

гдѣ C_{or} представляетъ то значеніе для C_r, когда части фермы l_r и l_{r+1} были бы простыми балками; тогда послѣ простаго промежуточнаго вычисленія получимъ такую зависимость

$$(7)\qquad M_{r-2}a_{r-1} + M_{r-1}b_r + M_r c_r + M_{r+1}b_{r+1} + M_{r+2}a_{r+1} = K_r.$$

Вспомогательные коэффиціенты опредѣляются по формуламъ:

$$(8\text{ a})\qquad \begin{cases} a_r = \dfrac{6EJ\omega_r}{l_r l_{r+1}} \\ b_r = l_r - \dfrac{6EJ}{l_r^2}\left(\omega_{r-1}\dfrac{l_{r-1}+l_r}{l_{r-1}} + \omega_r\dfrac{l_r+l_{r+1}}{l_{r+1}}\right) \\ c_r = 2(l_r+l_{r+1}) + 6EJ\left[\dfrac{\omega_{r-1}}{l^2_r} + \dfrac{\omega_r(l_r+l_{r+1})^2}{l^2_r l^2_{r+1}} + \dfrac{\omega_{r+1}}{l^2_{r+1}}\right], \end{cases}$$

и для члена, зависящаго отъ нагрузки, получимъ

$$(9\text{ a})\qquad \begin{cases} K_r = -6\left(\dfrac{\mathfrak{L}_{or}}{l_r} - \dfrac{\mathfrak{R}_{0(r+1)}}{l_{r+1}}\right) - 3\varepsilon EJ(t_u - t_o)\dfrac{l_r+l_{r+1}}{h} \\ \qquad -6EJ\left[\dfrac{e'_{r-1}}{l_r} - \dfrac{e'_r(l_r+l_{r+1})}{l_r l_{r+1}} + \dfrac{e'_{r+1}}{l_{r+1}}\right] \\ \qquad -6EJ\left[\dfrac{\omega_{r-1}C_{0(r-1)}}{l_r} - \dfrac{\omega\, C_0\,(l_r+l_{r+1})}{l_r l_{r+1}} + \dfrac{\omega_{r+1}C_{0(r+1)}}{l_{r+1}}\right]. \end{cases}$$

Уравненія для b_r и c_r можно преобразовать также въ слѣдующія:

$$(8\text{ b})\qquad \begin{cases} b_r = l_r - a_{r-1}\dfrac{l_{r-1}+l_r}{l_r} - a_r\dfrac{l_r+l_{r+1}}{l_r} \\ c_r = 3(l_r+l_{r+1}) - a_{r-1} - b_r - b_{r+1} - a_{r+1}; \end{cases}$$

послѣдній же членъ выраженія для K_r можно написать также въ такой формѣ:

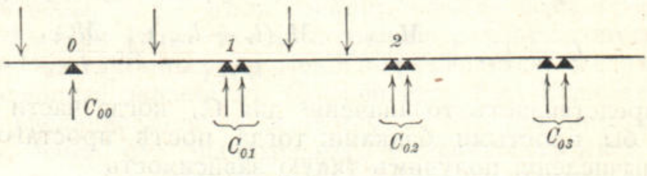
$$(9\text{ b})\qquad -a_{r-1}l_{r-1}C_{0(r-1)} + a(l_r+l_{r+1})C_{0r} - a_{r+1}l_{r+2}C_{0(r+1)}.$$

Нѣсколько другую форму принимаютъ первыя два условія упругости; эти условія надо написать здѣсь только для случая балки всюду свободно лежащей (не задѣланной по концамъ), причемъ балка можетъ свѣшиваться съ крайнихъ опоръ o и n, фиг. 44, стр. 38. Крайніе опорные моменты M_0 и M_n будутъ извѣстны.

Сопротивленія опоръ o и 1 будутъ равняться:

$$
(10) \qquad
\begin{aligned}
C_o &= C_{oo} + \frac{M_1}{l_1} \\
C_1 &= C_{o1} - \frac{M_1(l_1+l_2)}{l_1 l_2} + \frac{M_2}{l_2},
\end{aligned}
$$

причемы C_{oo} и C_{o1} означаютъ сопротивленія опоръ для балокъ, которыя въ точкахъ 1 и 2 разрѣзаны, фиг. 74. Требуемыя условія упругости напишутся въ такой формѣ:



Фиг. 74.

$$
11) \qquad
\begin{cases}
M_1 c_1 + M_2 b_2 + M_3 a_2 = K_1 \\
M_1 b_2 + M_2 c_2 + M_3 b_3 + M_4 a_3 = K_2,
\end{cases}
$$

причемъ K_1 должно быть вычислено по отдѣльной формулѣ

$$
(12) \qquad
\begin{cases}
K_1 = -M_o l_1 - 6\left(\dfrac{\mathfrak{L}_{o1}}{l_1} + \dfrac{\mathfrak{R}_{o2}}{l_2}\right) - 3\,\varepsilon EJ(t_u - t_o)\,\dfrac{l_1+l_2}{h} \\
\qquad - 6EJ\left[\dfrac{e'_o}{l_1} - \dfrac{e'_1(l_1+l_2)}{l_1 l_2} + \dfrac{e'_2}{l_2}\right] \\
\qquad - a_o l_o C_{oo} + a_1(l_1+l_2)C_{o1} - a_2 l_3 C_{o2},
\end{cases}
$$

которая отличается отъ уравненій 9 a и b членомъ $-M_o l_1$. Для K_2 имѣютъ значенія уравненія 9 a и b. Надо замѣтить, что въ выраженіе

$$
a_o = \frac{6EJ\omega_o}{l_o l_1}
$$

можно подставить вмѣсто l_o произвольную длину *).

Такимъ образомъ надо поступать и при составленіи обоихъ послѣднихъ условій упругости.

21. Балка съ перемѣннымъ сѣченіемъ. Для вычисленія опорныхъ моментовъ служатъ общія уравненія (1) и (2) на стр. 33. Эти уравненія съ помощью формулъ

$$
\frac{l_r+l_{r+1}}{l_r l_{r+1}}\,\delta_r = \frac{e_{r-1}}{l_r} - \frac{e_r(l_r+l_{r+1})}{l_r l_{r+1}} + \frac{e_{r+1}}{l_{r+1}}
$$

$$
e_r = e'_r + \omega_r C_r
$$

$$
C_r = C_{0r} + \frac{M_{r-1}}{l_r} - \frac{M_r(l_r+l_{r+1})}{l_r l_{r+1}} + \frac{M_{r+1}}{l_{r+1}}
$$

*) Тоже самое относится и до l_{n+1}, въ выраженіи $a_n = \dfrac{6EJ\omega_0}{l_n l_{n+1}}$.

можно преобразовать подобнымъ же образомъ, какъ и условія упругости для фермы съ постояннымъ сѣченіемъ. А именно мы получимъ уравненіе

$$M_{r-2}\alpha_{r-1} + M_{r-1}\beta_r + M_r\gamma_r + M_{r+1}\beta_{r+1} + M_{r+2}\alpha_{r+1} = Z_r, \tag{12}$$

гдѣ α, β, γ и Z опредѣляются по слѣдующимъ формуламъ:

$$\left\{\begin{aligned}
\alpha_r &= \frac{\omega_r}{l_r l_{r+1}} \\
\beta_r &= \frac{d_r}{l_r} - \frac{1}{l^2_r}\left(\omega_{r-1}\frac{l_{r-1}+l_r}{l_{r-1}} + \omega_r\frac{l_r+l_{r+1}}{l_{r+1}}\right) \\
&= \frac{d_r}{l_r} - \alpha_{r-1}\frac{l_{r-1}+l_r}{l_r} - \alpha_r\frac{l_r+l_{r+1}}{l_r} \\
\gamma_r &= \frac{c_r}{l_r} + \frac{c_r}{l_{r+1}} + \frac{\omega_{r-1}}{l^2_r} + \frac{\omega_r(l_r+l_{r+1})^2}{l^2_r l^2_{r+r}} + \frac{\omega_{r+1}}{l^2_{r+1}} \\
&= \frac{d_4}{l_r} + \frac{c_r}{l_r} + \frac{c_r}{l_{r+1}} + \frac{d_{r+1}}{l_{r+1}} - \alpha_{r-1} - \beta_r - \beta_{r+1} - \alpha_{r+1}
\end{aligned}\right. \tag{13}$$

$$\left\{\begin{aligned}
Z_r = &-\Sigma P_m\delta_{mr} - c_{rt} - \frac{e'_{r-1}}{l_r} + \frac{e'_r(l_r+l_{r+1})}{l_r l_{r+1}} - \frac{e'_{r+1}}{l_{r+1}} \\
&- \alpha_{r-1}l_{r-1}C_{0(r-1)} + \alpha_r(l_r+l_{r+1})C_{0r} - \alpha_{r+1}l_{r+2}C_{0(r+1)}.
\end{aligned}\right. \tag{14}$$

Значеніе буквъ d_r, c_r, δ_{mr}, c_{rt} понятно изъ фиг. 37, стр. 33.

22. Разрѣшеніе условій упругости производится проще всего путемъ вычисленій; въ особенности просто это рѣшеніе при симметричномъ расположеніи фермы. Разсмотримъ, напр., лежащую на 8 опорахъ симметричную балку *съ постояннымъ по всей длинѣ сѣченіемъ*, несущую какую либо нагрузку. Условія упругости для нея напишутся въ такой формѣ:

$$\begin{aligned}
M_1c_1 + M_2b_2 + M_3a_2 &= K_1 \\
M_1b_2 + M_2c_2 + M_3b_3 + M_4a_3 &= K_2 \\
M_1a_2 + M_2b_3 + M_3c_3 + M_4b_4 + M_5a_3 &= K_3 \\
M_2a_3 + M_3b_4 + M_4c_3 + M_5b_3 + M_6a_2 &= K_4 \\
M_3a_3 + M_4b_3 + M_5c_2 + M_6b_2 &= K_5 \\
M_4a_2 + M_5b_2 + M_6c_1 + &= K_6\,,
\end{aligned}$$

потому что $a_4 = a_3$, $a_5 = a_2$, затѣмъ $b_5 = b_3$, $b_6 = b_2$ и наконецъ $c_4 = c_3$, $c_5 = c_2$, $c_6 = c_1$.

Сложивъ первое уравненіе съ послѣднимъ, второе съ предпослѣднимъ и т. д. и введя новыя неизвѣстныя

$$X_1 = M_1 + M_6;\;\; X_2 = M_2 + M_5;\;\; X_3 = M_3 + M_4$$
$$Y_1 = M_1 - M_6;\;\; Y_2 = M_2 - M_5;\;\; Y_3 = M_3 - M_4,$$

получимъ двѣ группы уравненій, каждое съ тремя неизвѣстными, а именно:

$$\left\{\begin{aligned}
X_1c_1 + X_2b_2 + X_3a_2 &= A_1 \\
X_1b_2 + X_2c_2 + X_3(b_3+a_3) &= A_2 \\
X_1a_2 + X_2(b_3+a_3) + X_3(c_3+b_4) &= A_3
\end{aligned}\right. \tag{I}$$

$$
\text{(II)} \quad \left\{
\begin{aligned}
&Y_1c_1 + Y_2b_2 + Y_3a_2 = B_1\\
&Y_1b_2 + Y_2c_2 + Y_3(b_3 - a_3) = B_2\\
&Y_1a_2 + Y_2(b_3 - a_3) + Y_3(c_3 - b_4) = B_3,
\end{aligned}\right.
$$

гдѣ

$$
\begin{aligned}
A_1 &= K_1 + K_6, \quad A_2 = K_2 + K_5, \quad A_3 = K_3 + K_4\\
B_1 &= K_1 - K_6, \quad B_2 = K_2 - K_5, \quad B_3 = K_3 - K_4\,.
\end{aligned}
$$

Обозначивъ буквой D опредѣлитель, составленный изъ коэффиціентовъ при количествахъ X, затѣмъ буквами D_1, D_2, D_3 тѣ опредѣлители, которые получатся, если въ опредѣлителѣ D замѣнить послѣдовательно столбцы первый, второй, третій столбцомъ $A_1\ A_2\ A_3$ тогда найдемъ, что

$$
X_1 = \frac{D_1}{D}, \quad X_2 = \frac{D_2}{D}, \quad X_3 = \frac{D_3}{D},
$$

гдѣ

$$
D = \begin{vmatrix} c_1 & b_2 & a_2\\ b_2 & c_2 & (b_3 + a_3)\\ a_2 & (b_3 + a_3) & (c_3 + b_4) \end{vmatrix},
$$

$$
D_1 = \begin{vmatrix} A_1 & b_2 & a_2\\ A_2 & c_2 & (b_3 + a_3)\\ A_3 & (b_3 + a_3) & (c_3 + b_4) \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} c_1 & A_1 & a_2\\ b_2 & A_2 & (b_3 + a_3)\\ a_2 & A_3 & (c_3 + b_4) \end{vmatrix} \ \text{и т. д.}
$$

Вычисленіе здѣсь значительно облегчено, потому что уравненіе (I) имѣетъ простую симметрію, а это приводитъ къ тому, что и рѣшеніе уравненій можно представить въ такой же простой симметричной формѣ. Если написать уравненія (I) въ болѣе наглядной формѣ, а именно

$$
\begin{aligned}
X_1a' + X_2b' + X_3c' &= A_1\\
X_1b' + X_2d' + X_3e' &= A_2\\
X_1c' + X_2e' + X_3f' &= A_3\,,
\end{aligned}
$$

то неизвѣстныя по разрѣшеніи уравненій будутъ таковы

$$
\begin{aligned}
X_1 &= a''A_1 + b''A_2 + c''A_3\\
X_2 &= b''A_1 + d''A_2 + e''A_3\\
X_3 &= c''A_1 + e''A_2 + f''A_3\,,
\end{aligned}
$$

гдѣ

$$
a'' = \frac{a_1'}{D}, \quad b'' = \frac{b_1'}{D}, \quad c'' = \frac{c_1'}{D}, \quad d'' = \frac{d_1'}{D} \ \text{и т. д.,}
$$

причемъ

$$
D = \begin{vmatrix} a' & b' & c'\\ b' & d' & e'\\ c' & e' & f' \end{vmatrix} = a'a_1' + b'b_1' + c'c_1',
$$

и a_1', b_1', c_1', d_1' . . . . подопредѣлители къ элементамъ a', b', c' . . . . опредѣлителя D *), а именно:

*) Общая форма опредѣлителя n-ой степени изъ n элементовъ $a\,b\,c\,.\,.\,.\,q$ такова

$$
D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \cdots & q_1\\ a_2 & b_2 & c_2 & \cdots & q_2\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot\\ a_n & b_n & c_n & \cdots & q_n \end{vmatrix}.
$$

$$a'_1 = + \begin{vmatrix} d' & e' \\ e' & f' \end{vmatrix}$$

$$b'_1 = - \begin{vmatrix} b' & c' \\ e' & f' \end{vmatrix}, \quad d_1{}' = + \begin{vmatrix} a' & c' \\ c' & f' \end{vmatrix}$$

$$c_1{}' = + \begin{vmatrix} b' & c' \\ d' & e' \end{vmatrix}, \quad e_1{}' = - \begin{vmatrix} a' & c' \\ b' & e' \end{vmatrix}, \quad f'_1 = + \begin{vmatrix} a' & b' \\ b' & d' \end{vmatrix}.$$

Представивъ подобнымъ же образомъ неизвѣстныя Y въ такой формѣ

$$\begin{aligned} Y_1 &= a''' B_1 + b''' B_2 + c''' B_3 \\ Y_2 &= b''' B_1 + d''' B_2 + e''' B_3 \\ Y_3 &= c''' B_1 + e''' B_2 + f''' B_3, \end{aligned}$$

мы найдемъ

$$M_1 = \frac{1}{2}(X_1 + Y_1); \quad M_6 = \frac{1}{2}(X_1 - Y_1)$$

$$M_2 = \frac{1}{2}(X_2 + Y_2); \quad M_5 = \frac{1}{2}(X_2 - Y_2)$$

$$M_3 = \frac{1}{2}(X_3 + Y_3); \quad M_4 = \frac{1}{2}(X_3 - Y_3).$$

Такимъ образомъ имѣемъ, напримѣръ:

$$\begin{aligned} 2 M_1 &= a'' (K_1 + K_2) + b'' (K_2 + K_5) + c'' (K_3 + K_4) \\ &\quad + a'''(K_1 - K_6) + b''' (K_2 - K_5) + c''' (K_3 - K_4) \\ &= K_1 (a'' + a''') + K_2 (b'' + b''') + K_3 (c'' + c''') \\ &\quad + K_4 (c'' - c''') + K_5 (b'' - b''') + K_6 (a'' - a'''). \end{aligned}$$

Вычисленіе опять упрощается вслѣдствіе того, что окончательныя рѣшенія должны быть представлены въ двойной симметричной формѣ:

$$\begin{aligned} M_1 &= \underline{a} K_1 + \underline{b} K_2 + \underline{c} K_3 + \overline{c} K_4 + \overline{b} K_5 + \overline{a} K_6 \\ M_2 &= \underline{b} K_1 + \underline{d} K_2 + \underline{e} K_3 + \overline{e} K_4 + \overline{d} K_5 + \overline{b} K_6 \\ M_3 &= \underline{c} K_1 + \underline{e} K_2 + \underline{f} K_3 + \overline{f} K_4 + \overline{e} K_5 + \overline{c} K_6 \\ M_4 &= \overline{c} K_1 + \overline{e} K_2 + \overline{f} K_3 + \underline{f} K_4 + \underline{e} K_5 + \underline{c} K_6 \\ M_5 &= \overline{b} K_1 + \overline{d} K_2 + \overline{e} K_3 + \underline{e} K_4 + \underline{d} K_5 + \underline{b} K_6 \\ M_6 &= \overline{a} K_1 + \overline{b} K_2 + \overline{c} K_3 + \underline{c} K_4 + \underline{b} K_5 + \underline{a} K_6, \end{aligned}$$

гдѣ

$$\underline{a} = \frac{a'' + a'''}{2}, \quad \underline{b} = \frac{b'' + b'''}{2}, \quad \underline{c} = \frac{c'' + c'''}{2},$$

$$\overline{c} = \frac{c'' - c'''}{2}, \quad \overline{b} = \frac{b'' - b'''}{2}, \quad \overline{a} = \frac{a'' - a'''}{2}$$

$$\underline{d} = \frac{d'' + d'''}{2}, \quad \underline{e} = \frac{e'' + e'''}{2}, \quad \overline{e} = \frac{e'' - e'''}{2}, \quad \overline{d} = \frac{d'' - d'''}{2}$$

$$\underline{f} = \frac{f'' + f'''}{2}, \quad \overline{f} = \frac{f'' - f'''}{2}.$$

Путь расчета остается совершенно такимъ же и при нечетномъ числѣ условій упругости. Такъ напр., если число опоръ равно 7, то получимъ:

$$
\begin{array}{rcl}
M_1 c_1 + M_2 b_2 + M_3 a_2 &=& K_1 \\
M_1 b_2 + M_2 c_2 + M_3 b_3 + M_4 a_3 &=& K_2 \\
M_1 a_2 + M_2 b_3 + M_3 c_3 + M_4 b_3 + M_5 a_2 &=& K_3 \\
M_2 a_3 + M_3 b_3 + M_4 c_2 + M_5 b_2 &=& K_4 \\
M_3 a_2 + M_4 b_2 + M_5 c_1 &=& K_5,
\end{array}
$$

а затѣмъ при обозначеніяхъ:

$$
M_1 + M_5 = X_1, \quad M_2 + M_4 = X_2, \quad M_3 + M_3 = X_3
$$
$$
M_1 - M_5 = Y_1, \quad M_2 - M_4 = Y_2
$$

найдемъ обѣ группы уравненій

$$
(\mathrm{I}) \quad \left\{
\begin{array}{l}
X_1 c_1 + X_2 b_2 + X_3 a_2 = K_1 + K_5 = A_1 \\
X_1 b_2 + X_2 (c_2 + a_3) + X_3 b_3 = K_2 + K_4 = A_2 \\
X_1 a_2 + X_2 b_3 + X_3 \dfrac{c_3}{2} = K_3 = A_3
\end{array}
\right.
$$

$$
(\mathrm{II}) \quad \left\{
\begin{array}{l}
Y_1 c_1 + Y_2 b_2 = K_1 - K_5 = B_1 \\
Y_1 b_2 + Y_2 (c_2 - a_3) = K_2 - K_4 = B_2.
\end{array}
\right.
$$

Отсюда мы найдемъ сначала X и Y въ простой симметричной формѣ

$$
\begin{array}{l}
X_1 = a'' A_1 + b'' A_2 + c'' A_3 \\
X_2 = b'' A_1 + d'' A_2 + e'' A_3 \\
X_3 = c'' A_1 + e'' A_2 + f'' A_3
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
Y_1 = a''' B_1 + b''' B_2 \\
Y_2 = b''' B_1 + d''' B_2
\end{array}
$$

и наконецъ опорные моменты:

$$
\begin{array}{l}
M_1 = \underline{a}\, K_1 + \underline{b}\, K_2 + (c)\, K_3 + \bar{b}\, K_4 + \bar{a}\, K_5 \\
M_2 = \underline{b}\, K_1 + \underline{d}\, K_2 + (e)\, K_3 + \bar{d}\, K_4 + \bar{b}\, K_5 \\
M_3 = \underline{c}\, K_1 + \underline{e}\, K_2 + (f)\, K_3 + \underline{e}\, K_4 + \underline{c}\, K_5 \\
M_4 = \bar{b}\, K_1 + \bar{d}\, K_2 + (e)\, K_3 + \underline{d}\, K_4 + \underline{b}\, K_5 \\
M_5 = \bar{a}\, K_1 + \bar{b}\, K_2 + (c)\, K_3 + \underline{b}\, K_4 + \underline{a}\, K_5,
\end{array}
$$

гдѣ

$$
\underline{a} = \frac{a'' + a'''}{2}, \quad \underline{b} = \frac{b'' + b'''}{2}, \quad (c) = \frac{c''}{2}, \quad \bar{b} = \frac{b'' - b'''}{2}, \quad \bar{a} = \frac{a'' - a'''}{2}
$$

$$
\underline{d} = \frac{d'' + d'''}{2}, \quad (e) = \frac{e''}{2}, \quad \bar{d} = \frac{d'' - d'''}{2}
$$

$$
(f) = \frac{f''}{2}.
$$

23. Линіи вліянія для опорныхъ моментовъ. Составленіе общихъ правилъ для опредѣленія самаго опаснаго способа загруженія при сжимаемыхъ опорахъ связано съ большими затрудненіями, поэтому для рѣшенія даннаго вопроса слѣдуетъ прибѣгнуть къ посредству линій вліянія. Для того чтобъ описать избранный путь болѣе нагляднымъ образомъ, придадимъ выраженію, полученному при разрѣшеніи условій упругости для какого нибудь опорнаго момента (напр. M_i для опоры i), такую форму:

(15) $$M i_r = \beta_{i1} K_1 + \beta_{i2} K_2 + \beta_{i3} K_3 + \ldots \beta_{i(n-1)} K_{n-1} = \sum_{1}^{n-1} \beta_{ir} K_r$$

и разложимъ часть члена K_r, зависящую отъ нагрузки, на составныя части:

(16) $$K_r' = -6\left(\frac{\mathfrak{L}_{or}}{l_r} + \frac{\mathfrak{R}_{o(r+1)}}{l_{r+1}}\right) \text{ и}$$

(17) $$K_r'' = -a_{r-1} l_{r-1} C_{0(r-1)} + a_r(l_r + l_{r+1}) C_{0r} - a_{r+1} l_{r+2} C_{0(r+1)}.$$

Вліяніе остатка, т. е.

(18) $$K_r''' = -3\varepsilon EJ(t_u - t_o)\frac{l_r + l_{r+1}}{h} - 6EJ\left[\frac{e'_{r-1}}{l_r} - \frac{e'_r(l_r + l_{r+1})}{l_r l_{r+1}} + \frac{e'_{r+1}}{l_{r+1}}\right]$$

разсматривается само по себѣ и затѣмъ въ дальнѣйшемъ во вниманіе не принимается.

Сначала положимъ, что всѣ K'' равны нулю, т. е. положимъ, что

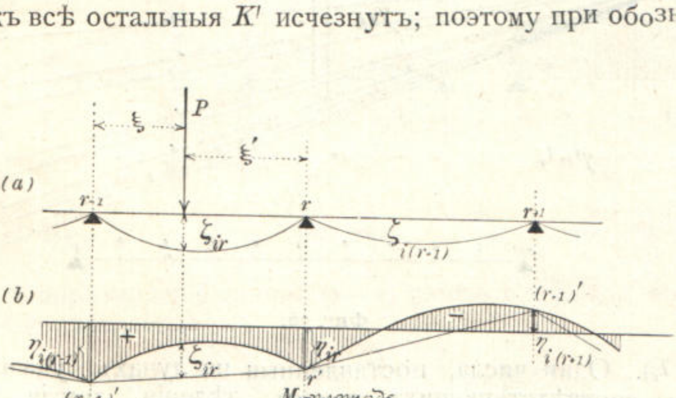
$$M_i = \beta_{i1} K'_1 + \beta_{i2} K'_2 + \beta_{i3} K'_3 + \ldots + \beta_{i(n-1)} K'_{n-1}.$$

Если грузъ P. перемѣщающійся по балкѣ, лежитъ въ r-омъ пролетѣ, въ разстояніяхъ ξ и ξ' отъ $(r-1)$ и соотвѣтственно r (фиг. 75 а), тогда получимъ по стр. 31:

$$K'_{r-1} = -\frac{6\,\mathfrak{R}_{or}}{l_r} = -Pl_r^2\left(\frac{\xi'}{l_r} - \frac{\xi'^3}{l_r^3}\right) \text{ и}$$

$$K'_r = -\frac{6\,\mathfrak{L}_{or}}{l_r} = -Pl_r^2\left(\frac{\xi}{l_r} - \frac{\xi^3}{l_r^3}\right),$$

тогда какъ всѣ остальныя K' исчезнутъ; поэтому при обозначеніяхъ



Фиг. 75.

введенныхъ на стр. 41:

$$\operatorname{tg}\varphi_L = \frac{\xi'}{l_r} - \frac{\xi'^3}{l_r^3} \text{ и } \operatorname{tg}\varphi_R = \frac{\xi}{l_r} - \frac{\xi^3}{l_r^3},$$

получимъ слѣдующее выраженіе вліянія единицы груза, лежащаго въ r-омъ пролетѣ, на величину момента M_i:

(19) $$M_{ir} = -P(\beta_{ir(r-1)}) \operatorname{tg}\varphi_L + \beta_{ir}\operatorname{tg}\varphi_R)l_r^2 = P\zeta_{ir}.$$

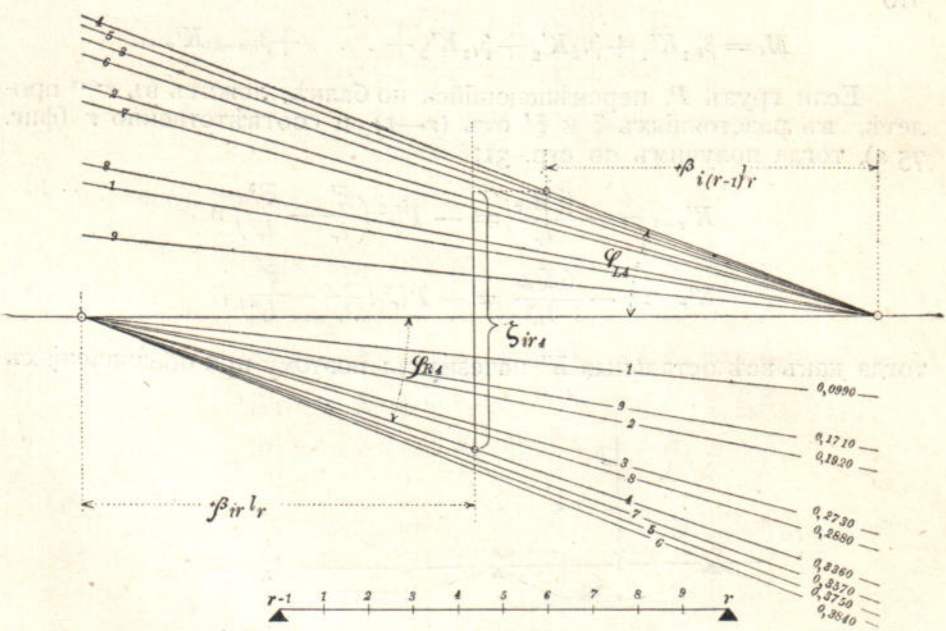
Для груза $P = 1$ въ первомъ пролетѣ найдемъ

(20) $$\zeta_{i_1} = -\beta_{i_1}\operatorname{tg}\varphi_R l_1^2$$

и для груза въ пролетѣ l_n:

(21) $$\zeta_{in} = -\beta_{i(n-1)}\operatorname{tg}\varphi_L l^2_n.$$

Такъ какъ $\operatorname{tg}\varphi_L$ и $\operatorname{tg}\varphi_R$ зависятъ только отъ отношеній $' : l_r$ и соотвѣтственно $\xi : l_r$, но не отъ величины пролетовъ, то вычисленіе *линіи количествъ* ζ_i можно сдѣлать безъ большой потери времени. Даже для очень большихъ пролетовъ достаточно раздѣлить пролетъ на 10 равныхъ частей, и тогда можно воспользоваться таблицей на стр. 41. Для графическаго опредѣленія ζ можно воспользоваться двумя пучками лучей, построенныхъ весьма наглядно на фиг. 76 *) (опредѣленіе ζ_{ir} для четвертой точки дѣленія



Фиг. 76.

пролета l_r). Одни числа, поставленныя на лучахъ, указываютъ на порядокъ соотвѣтствующихъ точекъ дѣленія, другія же числа

---

*) На фиг. 76 вмѣсто $\beta_{i(r-1)}l_r$ надо читать $\beta_{i(r-1)}l_r^2$
„ $\beta_{ir}l_r$ „ „ $\beta_{ir}l_r^2$.

представляютъ взятыя изъ таблицъ величины тангенсовъ угловъ наклоненія лучей. Значенія $\operatorname{tg}\varphi_L$ для точекъ дѣленія 1, 2, 3, . . . соотвѣтствуютъ значеніямъ $\operatorname{tg}\varphi_R$ для точекъ дѣленія 9, 8, 7 . . . Еще проще производится опредѣленіе вліянія членовъ K''. Дѣйствительно, линія вліянія для C_{0r} состоитъ, по фиг. 50, стр. 43, изъ двухъ прямыхъ, которыя пересѣкаются на вертикали точки r и даютъ ординаты, равныя нулю, въ точкахъ $(r-1)$ и $(r+1)$; а поэтому подстановка членовъ K'' въ уравненіе 15 должна доставить многоугольникъ вліянія, вершины котораго . . . $(r-1)'$ r' $(r+1)'$ . . . лежатъ на вертикаляхъ подъ опорными точками, фиг. 75 b; этотъ многоугольникъ опредѣляется ординатами $\eta_{i0}, \eta_{i1}, \ldots \eta_{ir}, \ldots \eta_{in}$. Когда грузъ P приходится надъ опорой r, то получаемъ $C_{0r} = P$, и въ это же время всѣ остальныя C_0 исчезаютъ; такимъ образомъ будемъ имѣть:

$$K_1'' = 0,\ K_2'' = 0, \ldots K''_{r-2} = 0$$
$$K''_{r-1} = -a_r l_{r+1} P,\ K_r'' = +a_r(l_r + l_{r+1})P,\ K''_{r+1} = -a_r l_r P$$
$$K''_{r+1} = 0, \ldots K''_{n-1} = 0.$$

Затѣмъ мы получаемъ

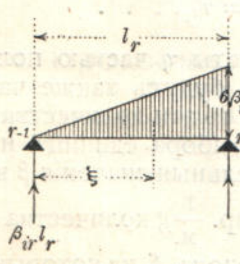
$$M_i = [-\beta_{i(r-1)} a_r l_{r+1} + \beta_{ir} a_r (l_r + l_{r+1}) - \beta_{i(r+1)} a_r l_r] P \text{ или же}$$
$$\eta_{ir} = a_r[-\beta_{i(r-1)} l_{r+1} + \beta_{ir}(l_r + l_{r+1}) - \beta_{i(r+1)} l_r]; \tag{22}$$

для крайнихъ же опоръ 0 и n надо примѣнить иныя формулы, а именно:

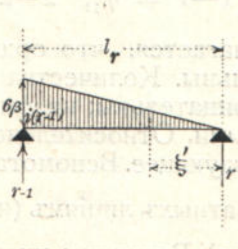
$$\left\{ \begin{aligned} \eta_{i0} &= -a_0 l_0 \beta_{i1} \quad *) \\ \eta_{in} &= -a_n l_{n+1} \beta_{i(n-1)}. \end{aligned} \right. \tag{23}$$

Сложеніе результатовъ вліянія количествъ K' и K'' производится путемъ отложенія ординатъ линіи количествъ ζ_i отъ многоугольника количествъ η_i, фиг. 75 b.

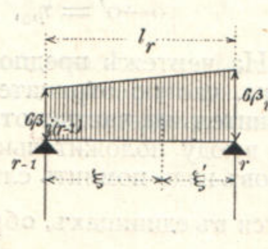
Другой также наглядный графическій способъ заключается въ разсмотрѣніи простой балки пролетомъ l_r, на которую дѣйствуютъ нагрузка, выражаемая площадью треугольника съ высотой $6\beta_{ir}$,



Фиг. 77.



Фиг. 78.



Фиг. 79.

фиг. 77. Сопротивленіе опоры $(r-1)$ равняется $\beta_{ir} l_r$, а моментъ для сѣченія ξ составляетъ:

$$(M) = \beta_{ir} l_r \cdot \xi - 6\,\xi_r \frac{\xi}{l_r} \cdot \frac{\xi}{2} \cdot \frac{\xi}{3} = \beta_{ri} l_r^2 \left(\frac{\xi}{l_r} - \frac{\xi^3}{l_r^3} \right);$$

---

*) Относительно l_0 и l_{n+1} см. стр. 62.

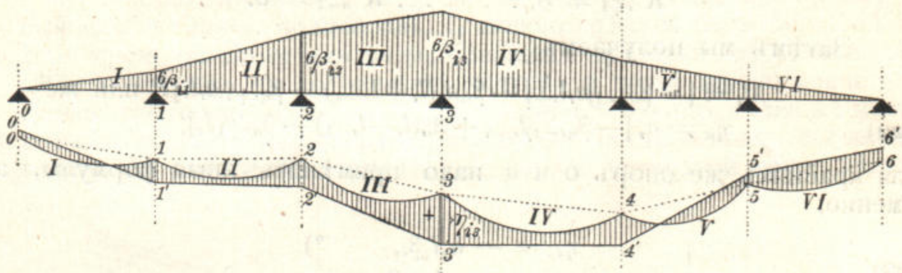
точно такимъ же путемъ найдемъ моментъ при нагрузкѣ треугольникомъ, фиг. 78:

$$(M) = \beta_{i(r-1)} l_r^2 \left(\frac{\xi'}{l_r} - \frac{\xi'^3}{l_r^3} \right).$$

Слѣдовательно, нагрузкѣ трапецiей, фиг. 79, соотвѣтствуетъ

$$(M) = (\beta_{i(r-1)} \operatorname{tg} \varphi_L + \beta_{ir} \operatorname{tg} \varphi_R) l_r^2 = - \zeta_{ir},$$

а отсюда слѣдуетъ, что на линiю количествъ ζ_{ir} можно смотрѣть, какъ на веревочную кривую, построенную при полюсномъ разстоянiи 1 для трапецоидальной грузовой площади, фиг. 79. Это толкованiе линiи количествъ ζ_{ir} приводитъ къ слѣдующему способу построенiя площади влiянiя для количества M_i, фиг. 80. Веревочныя кривыя



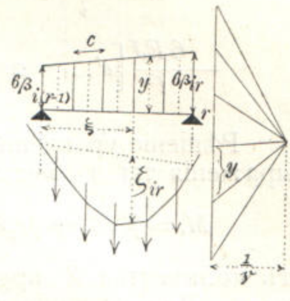
Фиг. 80.

I, II, III, . . . соотвѣтствуютъ грузовымъ площадямъ съ тѣми же номерами; пунктирныя замыкающiя линiи 0—1, 1—2, 2—3, . . . соотвѣтствующiя отдѣльнымъ балкамъ, замѣнены, въ виду введенiя значенiй K'', замыкающими 0′—1′, 1′—2′, 2′—3′, . . . ; причемъ:

$$\overline{0—0'} = \eta_{i0}, \quad \overline{1—1'} = \eta_{i1}, \quad \overline{2—2'} = \eta_{i2}, \ldots$$

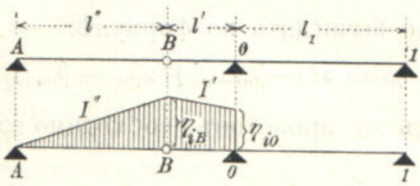
На чертежѣ предполагается, что ординаты η частью положительны, частью отрицательны. Количества β_i будутъ также частью положительны, частью отрицательны; на фиг. 80 эти количества приняты всюду положительными. Относительно выбора единицъ и масштабовъ надо помнить слѣдующее. Вспомогательныя значенiя β выражаются въ единицахъ, обратныхъ линiямъ (напр. $\frac{1}{\text{м.}}$); количества η и ζ представляютъ линiи (метры). Величины площадокъ f, на которыя разлагаются грузовыя площади *I*, *II*, . . . на фиг. 80 и 81 при построенiи веревочныхъ кривыхъ, представляютъ числа $\left(\frac{1}{\text{м}} . \text{м.}\right)$; если замѣнить величины площадокъ средними высотами ихъ $y = \frac{f}{c}$, гдѣ c ширина площадки, то полюсное разстоянiе 1 (число) надо замѣнить полюснымъ разстоянiемъ $1 : c$. Масштабъ, по которому наносятся количества $f : c$ и $1 : c$, не имѣетъ значенiя; количества ζ получаются въ томъ же линейномъ масштабѣ, въ которомъ построены пролеты l. Тѣмъ не менѣе лучше выбрать для количествъ ζ нѣсколько бóльшiй масштабъ, напр. въ ν—разъ большiй, чѣмъ для пролетовъ. Это получается при полюсномъ разстоянiи $1 : \nu c$.

Когда балка $o—n$ продолжается за опору o на влличину l', фиг. 82, причемъ конецъ B поддерживаетъ простую балку AB, то линiя влiянiя для количества M_i на протяженiи между o и A состоитъ изъ двухъ прямыхъ I', I'', которыя опредѣляются ординатами η_{io} и η_{iB}. Если грузъ P приходится надъ B, то въ опорѣ o вызывается моментъ $M_o = -Pl'$; затѣмъ имѣемъ



Фиг. 81.

$$C_{00} = P\left(1 + \frac{l'}{l_1}\right), \quad C_{01} = -P\frac{l'}{l_1}, \quad C_{02} = 0, \ldots \ldots,$$



Фиг. 82.

и при $P = 1$ получимъ (по уравн. 12):

$$K_1 = -l'l_1 - a_0 l_0\left(1 + \frac{l'}{l_1}\right) - a_1(l_1 + l_2)\frac{l'}{l_1}, \text{ затѣмъ}$$

$$K_2 = +a_1 l_1 \frac{l'}{l_1} = a_1 l', \text{ и такимъ образомъ}$$

$$\eta_{iB} = -\beta_{i1}\left[l'l_1 + a_0 l_0\left(1 + \frac{l'}{l_1}\right) + a_1(l_1+l_2)\frac{l'}{l_1}\right] + \beta_{i2} a_1 l'.$$

24. Продолженiе. Въ случаѣ равныхъ пролетовъ ($l_1 = l_2 = \ldots = l$) (что бываетъ очень часто) и при одинаково расположенныхъ опорахъ ($\omega_1 = \omega_2 = \ldots \omega$) ранѣе выведенныя уравненiя упрощаются слѣдующимъ образомъ.

Если для краткости письма положить

$$\frac{6EJ\omega}{l^3} = \alpha,$$

то условiя упругости напишутся въ такой формѣ:

$$\begin{aligned}
M_1(4+6\alpha) + M_2(1-4\alpha) + M_3\alpha &= Z_1 \\
M_1(1-4\alpha) + M_2(4+6\alpha) + M_3(1-4\alpha) + M_4\alpha &= Z_2 \\
M_1\alpha + M_2(1-4\alpha) + M_3(4+6\alpha) + M_4(1-4\alpha) + M_5\alpha &= Z_3 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
M_{r-2}\alpha + M_{r-1}(1-4\alpha) + M_r(4+6\alpha) + M_{r+1}(1-4\alpha) + M_{r+2}\alpha &= Z_r \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
M_{n-4}\alpha + M_{n-3}(1-4\alpha) + M_{n-2}(4+6\alpha) + M_{n-1}(1-4\alpha) &= Z_{n-2} \\
M_{n-3}\alpha + M_{n-2}(1-4\alpha) + M_{n-1}(4+6\alpha) &= Z_{n-1},
\end{aligned}$$

гдѣ

$$Z_r = \frac{K_r}{l} = -6\left(\frac{\mathfrak{L}_{or}}{l^2} + \frac{\mathfrak{R}_{o(r+1)}}{l^2}\right) - \frac{6\varepsilon EJ(t_u - t_o)}{h} -$$

$$-\frac{6EJ}{l^2}\left[e'_{r-1} - 2e'_r + e'_{r+1}\right] - \alpha\left[C_{o(r-1)} - 2C_{or} + C_{o(r+1)}\right] l.$$

Рѣшеніе уравненій упругости даетъ для опорныхъ моментовъ выраженія такого вида:

$$M_i = \beta_{i1} Z_1 + \beta_{i2} Z_2 + \ldots + \beta_{ir} Z_r + \ldots + \beta_{i(n-1)} Z_{n-1},$$

гдѣ количества Z представляютъ *моменты*, а коэффиціенты β — *числа*. Линія вліянія для M_i опредѣляется, какъ и раньше, съ помощью линіи количествъ ζ_i и многоугольника количествъ η_i.

Уравненіе линіи количествъ ζ_i въ r-ой панели таково:

(24) $$\zeta_{ir} = -(\beta_{i(r-1)} \operatorname{tg} \varphi_L + \beta_{ir} \operatorname{tg} \varphi_R)\, l;$$

количества η_i надо вычислить по формулѣ:

(25) $$\eta_{i1} = \alpha l\,(-\beta_{i(r-1)} + 2\beta_{ir} - \beta_{i(r+1)}).$$

Для крайнихъ же пролетовъ необходимо взять отдѣльныя формулы:

(26) $$\zeta_{io} = -\beta_{i1}\, l \operatorname{tg} \varphi_R \qquad \zeta_{i(n-1)} = -\beta_{i(n-1)}\, l \operatorname{tg} \varphi_L$$

(27) $$\eta_{i1} = -\alpha l \beta_{i1} \qquad \eta_{in} = -\alpha l \beta_{i(n-1)}.$$

Если желаемъ представить линіи количествъ ζ_i какъ веревочные многоугольники для грузовыхъ площадей, опредѣленныхъ на фиг. 80 ординатами $6\beta_{ir}$, то мы должны выбрать для полюснаго разстоянія величину $l : c$ (вмѣсто $1 : c$ какъ было раньше). Тогда количества ζ_i получатся въ томъ же масштабѣ, въ которомъ вычерчены пролеты. Если для количествъ ζ_i будетъ примѣненъ масштабъ въ ν разъ большій, то полюсное разстояніе надо взять равнымъ $l{:}\nu c$.

Когда балка продолжена за опору o, фиг. 82, то получимъ

(28) $$\eta_{iB} = -\beta_{i1}\,(l' + \alpha l + 3l\alpha') + \beta_{i2}\,\alpha l'.$$

25. Добавленіе къ изслѣдованію балки, лежащей на жесткихъ опорахъ.

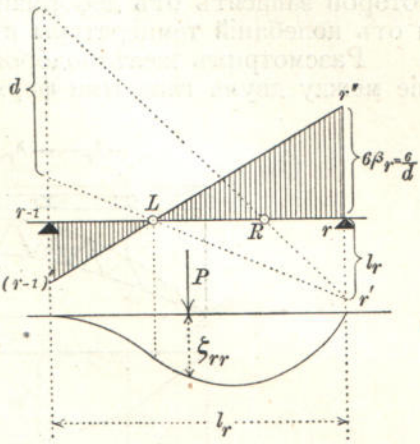
Способъ построенія линій вліянія для опорныхъ моментовъ, описанный въ № 23 и 24, примѣнимъ, конечно, и для случая жесткихъ опоръ. Такъ какъ значенія ω обращаются въ нуль, то значенія K'', а также многоугольникъ количествъ η исчезаютъ, поэтому линія количествъ ζ_i, будетъ линіею вліянія для M_i: Дальнѣйшее упрощеніе послѣ опредѣленія постоянныхъ точекъ L и R можно сдѣлать, пользуясь возможностью вычислить моменты M_{r-1} и M_r для двухъ смежныхъ опоръ съ помощью обоихъ уравненій (14), стр. 40, а также пользуясь тѣмъ обстоятельствомъ, что для каждаго опорнаго момента достаточно будетъ вычертить тѣ двѣ вѣтви линій вліянія, которыя соотвѣтствуютъ двумъ пролетамъ, смежнымъ съ разсматриваемой опорой. Количества N_{r-1} и N_r, содержащіяся въ данныхъ уравненіяхъ, имѣютъ одинаковыя значенія съ количества ми K'_{r-1} и K'_r. При рѣшеніи уравненія получаемъ для M_r формулу:

$$\beta_{r.\,r} = \frac{\varkappa_r}{l_r(\varkappa'_r\varkappa_r - 1)} \quad \text{и} \quad \beta_{r(r-1)} = -\frac{1}{l_r(\varkappa'_r\varkappa_r - 1)} = -\frac{\beta_{rr}}{\varkappa_r}.$$

Здѣсь $\varkappa_r$ и $\varkappa_{r-1}$ равны отношеніямъ отрѣзковъ:

$$\varkappa_r = \frac{\overline{rL}}{\overline{L(r-1)}} \quad \text{и}$$

$$\varkappa'_r = \frac{\overline{(r-1)R}}{\overline{Rr}}.$$



Фиг. 83.

Отложимъ теперь (фиг. 83) $\overline{rr''} = 6\beta_{rr}$ и проведемъ черезъ r'' и черезъ лѣвую постоянную точку прямую $\overline{r''(r-1)''}$, тогда найдемъ $\overline{(r-1)(r-1)''} = 6\beta_{r(r-1)}$. Линія количествъ ζ_{rr} будетъ веревочной линіей для заштрихованной грузовой площади; эта линія имѣетъ въ L точку перегиба; съ помощью этой линіи найдемъ опорный моментъ, вызываемый сосредоточеннымъ грузомъ P:

$$M_r = -P\zeta_{rr}\,.$$

Полюсное разстояніе равняется 1. Для болѣе удобнаго опредѣленія β_{rr} откладываемъ (лучше всего въ небольшомъ масштабѣ) $\overline{rr'} = l_r$, проводимъ изъ r' и черезъ постоянныя точки прямыя и опредѣляемъ на вертикали $(r-1)$ отсѣкаемый этими прямыми отрѣзокъ d. Тогда находимъ легко, что $\beta_{rr} = \frac{1}{d}$. Точно такимъ же образомъ строится линія вліянія для M_{r-1}.

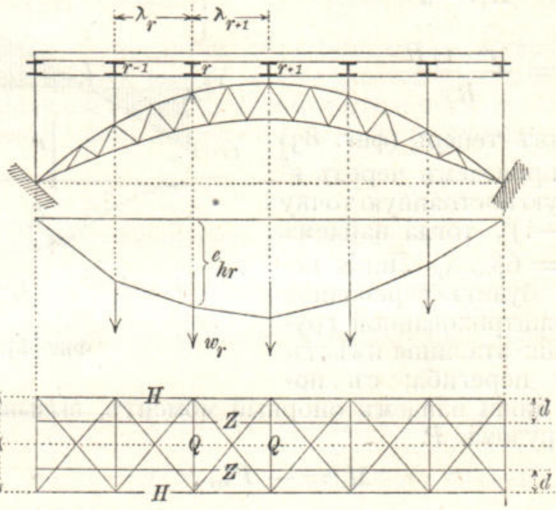
§ 7.

Неразрѣзная продольная мостовая балка.

(Примѣненіе къ § 6).

26. Верхнее строеніе моста (см. планъ на фиг. 84) состоитъ обыкновенно изъ главныхъ фермъ H, поперечныхъ балокъ Q и промежуточныхъ фермъ (продольныхъ балокъ) Z. Послѣднія фермы разсматриваются обыкновенно какъ отдѣльныя балки, если ихъ пролетъ равняется длинѣ панели, хотя подобное толкованіе допустимо только тогда, когда продольныя балки соединены съ поперечными шарнирнымъ образомъ. Если же шарниры отсутствуютъ, т. е. если продольная балка соединена съ поперечными фермами съ помощью заклепокъ или если продольная балка, ради экономіи въ стѣнкахъ поперечныхъ балокъ, пропущена цѣльною, то будемъ имѣть уже неразрѣзную балку, на упругихъ опорахъ, изгибающіе моменты для которой зависятъ отъ деформацій поперечныхъ и главныхъ фермъ и отъ колебаній температуры въ главныхъ фермахъ.

Разсмотримъ желѣзнодорожный мостъ въ одинъ путь. Разстояніе между двумя главными фермами пусть $2c$ (фиг. 84), между про-



Фиг. 84.

межуточными $2(c-d)$. Пусть длина панелей $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_r, \ldots$, опорные моменты для продольныхъ балокъ $M_1, M_2, \ldots M_r, \ldots$, давленія, производимыя продольными балками на поперечныя фермы, $C_0, C_1, C_2, \ldots, C_r, \ldots$ Пусть поперечное сѣченіе для всей продольной балки будетъ одно и тоже, — что вполнѣ возможно допустить; моментъ инерціи балки J. Не обращая вниманія на несущественное вліяніе неравномѣрнаго нагрѣванія продольной балки, мы получимъ слѣдующую зависимость между тремя смежными опорными моментами:

$$(1)\qquad M_{r-1}\lambda_r + 2M_r(\lambda_r+\lambda_{r+1}) + M_{r+1}\lambda_{r+1} = -6\left(\frac{\mathfrak{L}_{or}}{\lambda_r} + \frac{\mathfrak{R}_{o(r+1)}}{\lambda_{r+1}}\right)$$
$$-6EJ\left[\frac{e_{r-1}}{\lambda_r} - \frac{e_r(\lambda_r+\lambda_{r+1})}{\lambda_r\lambda_{r+1}} + \frac{e_{r+1}}{\lambda_{r+1}}\right],$$

гдѣ e_{r-1}, e_r, e_{r+1} означаютъ вертикальныя перемѣщенія опорныхъ точекъ. Эти перемѣщенія слагаются изъ прогибовъ e_h главныхъ фермъ, изъ e_q — вліяній деформацій поперечныхъ фермъ и стоекъ, находящихся между поперечными и главными фермами. Относительно e_q можно составить такую формулу

$$e_{qr} = e'_{qr} + \omega_r C_r \text{ (ср. стр. 59)},$$

гдѣ e'_{qr} представляетъ значенiе, не зависящее отъ C_r, напр. влiянiе измѣненiя температуры, которое при высокихъ стойкахъ можетъ быть значительнымъ. Напротивъ того, каждое изъ перемѣщенiй e_h зависитъ вообще отъ всѣхъ силъ C.

Если въ линiи прогибовъ главной фермы вписать многоугольникъ, вершины котораго лежали бы на вертикаляхъ подъ поперечными фермами, и затѣмъ принять этотъ многоугольникъ за веревочный многоугольникъ для извѣстныхъ грузовъ w, то получимъ такое уравненiе *):

(3) $$w_r = \left(\frac{e_{hr} - e_{h(r-1)}}{\lambda_r} - \frac{e_{h(r+1)} - e_{hr}}{\lambda_{r+1}}\right)$$

$$= -\left[\frac{e_{h(r-1)}}{\lambda_r} - \frac{e_{hr}(\lambda_r + \lambda_{r+1})}{\lambda_r \lambda_{r+1}} - \frac{e_{h(r+1)}}{\lambda_{r+1}}\right],$$

а уравненiе (1) приметъ слѣдующую форму:

(4) $$M_{r-1}\,\lambda_r + 2M_r(\lambda_r + \lambda_{r+1}) + M_{r+1}\lambda_{r+1}$$

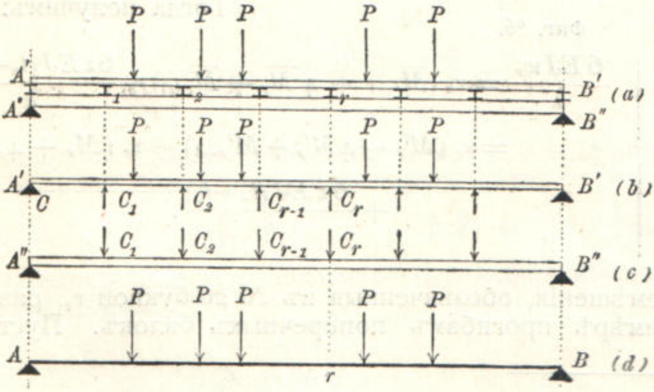
$$= -6\left(\frac{\mathfrak{L}_{or}}{\lambda_r} + \frac{\mathfrak{R}_{o(r+1)}}{\lambda_{r+1}}\right) + 6EJw_r$$

$$-6\,EJ\left[\frac{e'_{q(r-1)}}{\lambda_r} - \frac{e'_{qr}(\lambda_r + \lambda_{r+1})}{\lambda_{r'\,r+1}} - \frac{e_{q(r+1)}}{\lambda_{r+1}}\right]$$

$$-6\,EJ\left[\frac{\omega_{r-1}C_{r-1}}{\lambda_r} - \frac{\omega_r C_r(\lambda_r + \lambda_{r+1})}{\lambda_r \lambda_{r+1}} + \frac{\omega_{r+1}C_{r+1}}{\lambda_{r+1}}\right].$$

Замѣтимъ здѣсь, что до сихъ поръ мы не предполагали ничего опредѣленнаго о расположенiи главныхъ фермъ; будутъ ли главныя фермы рѣшетчатыми или сплошными, балками или арками—это совершенно безразлично.

27. Промежуточная ферма моста со сплошными балками. Имѣемъ $A'B'$ (фиг. 85 а) неразрѣзную промежуточную ферму (продольную балку), $A''B''$—главную ферму. Пусть на первую



Фиг. 85.

*) Мы примѣняемъ здѣсь правила, выведенныя нами въ § 3 (выпускъ VII.)

дѣйствуютъ заданныя давленія колесъ P и сопротивленія $C_0, C_1, C_2, \dots C_r, \dots$ поперечныхъ балокъ, фиг. 85 b, а на главную ферму пусть дѣйствуютъ только силы C, фиг. 85 c. Собственный вѣсъ главныхъ фермъ и поперечныхъ балокъ не разсматривается, такъ какъ деформаціи, производимыя этими вѣсами, появляются до установки продольныхъ балокъ. Пусть для сѣченія r означаютъ:

M_r — изгибающій моментъ въ продольной балкѣ,
$\overline{M}_r$ — „ „ въ главной фермѣ,
M'_r — „ „ въ простой балкѣ AB
(фиг. 85 d), на которую дѣйствуютъ только грузы P,

тогда получимъ

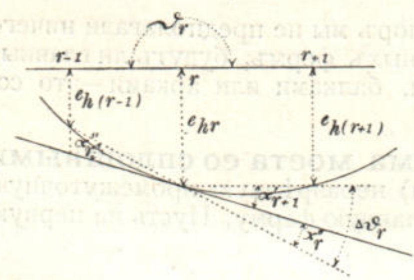
$$M_r = M'_r - \overline{M}_r . \tag{5}$$

Грузъ w_r, по фиг. 86, гдѣ представлена только часть линіи прогибовъ главной фермы, равняется

$$w_r = \Delta\vartheta_r = \alpha_r'' + \alpha'_{r+1} \text{ *)};$$

если J_r и J_{r+1} означаютъ моменты инерціи площадей поперечныхъ сѣченій главной фермы, считаемые постоянными на протяженіи панелей λ_r и λ_{+1r}, то по уравн. 7, стр. 29, получимъ:

$$6EJw_r = \frac{J}{J_r}\left(\overline{M}_{r-1} + 2\overline{M}_r\right)\lambda_r + \frac{J}{J_{r+1}}\left(\overline{M}_{r+1} + 2\overline{M}_r\right)\lambda_{r+1} + \frac{6\varepsilon EJ(t_u - t_o)\lambda}{h},$$



Фиг. 86.

гдѣ h означаетъ среднюю высоту главной фермы.

Предположимъ, что всѣ панели λ одинаковы; вмѣсто $J : J_r$ и $J : J_{+1}$ введемъ среднее значеніе (что вполнѣ допустимо); это значеніе обозначимъ буквой $\varkappa_r$.

Тогда получимъ:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{6EJw_r}{\lambda} &= \varkappa_r\left(\overline{M}_{r-1} + 4\,\overline{M}_r + \overline{M}_{r+1}\right) + \frac{6\varepsilon EJ(t_u - t_o)}{h} \\ &= \varkappa_r\left(M'_r + 4M'_r + M'_{r+1}\right) - \varkappa_r\left(M_r + 4M_r + M_{e+1}\right) \\ &\quad + \frac{6\varepsilon EJ(t_u - t_o)}{h}. \end{aligned}\right. \tag{6}$$

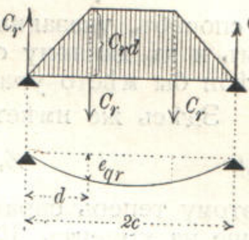
Перемѣщенія, обозначенныя въ № 26 буквой e_q, равны въ данномъ примѣрѣ прогибамъ поперечныхъ балокъ. Пусть моментъ

---

*) Можно найти также непосредственно

$$\frac{e_{hr} - e_{h(r+1)}}{\lambda_r} - \frac{e_{h(r+1)} - e_{hr}}{\lambda_{r+1}} = \alpha'' + \alpha'_{r+1}.$$

инерціи J_q для площади поперечнаго сѣченія поперечной балки будетъ постояннымъ; тогда по § 3 линію прогибовъ для поперечной балки получимъ, если площадь моментовъ (т. е. заштрихованную на фиг. 87 площадь) примемъ за грузовую площадь, опредѣлимъ новую площадь моментовъ и ординаты ея раздѣлимъ на EJ_q. Такъ какъ величина грузовой площади равняется $C_r d(2c-d)$, то на каждую опору приходится $\frac{1}{2} C_r d(2c-d)$ и тогда въ сѣченіи, гдѣ приложено C_r, получается моментъ



Фиг. 87

$$\frac{1}{2} C_r\, d(2c-d)\,.\,d - C_r\, d\,\frac{d}{2}\cdot\frac{d}{3} = \frac{1}{3}\, C_r\, d^2(3c-2d).$$

Но отсюда получаемъ:

$$(7)\qquad e_{qr} = \frac{C_r\, d^2(3c-2d)}{3EJ_q}\ \text{ т. е. } e'_{qr} = 0 \ \text{ и }\ \omega_r = \frac{d^2(3c-2d)}{3EJ_q}.$$

Если написать еще, что

$$(8)\qquad C_r = C_{or} + \frac{M_{r-1}}{\lambda} - \frac{2M_r}{\lambda} + \frac{M_{r+1}}{\lambda},$$

то уравненіе (4) по дѣленіи на λ обратится въ слѣдующее:

$$(9)\qquad \begin{aligned} &\alpha M_{r-2} + (1-4\alpha+\varkappa_r)\, M_{r-1} + (4+6\alpha+4\varkappa_r) M_r \\ &\quad + (1-4\alpha+\varkappa_r)\, M_{+1} + \alpha M_{r+2} = Z_r\ , \end{aligned}$$

гдѣ

$$(10)\qquad \begin{aligned} Z_r = &-6\left(\frac{\mathfrak{L}_{or}}{\lambda^2} + \frac{\mathfrak{R}_{o(r+1)}}{\lambda^2}\right) - \alpha\lambda[C_{o(r-1)} - 2C_r + C_{o(r+1)}] \\ &+ \varkappa_r\,(M'_{r-1} + 4M'_r + M'_{r+1}) + \frac{6\,\varepsilon EJ(t_u-t_o)}{h} \end{aligned}$$

и

$$(11)\qquad \alpha = 2\,\frac{J}{J_q}\,\frac{d^2(3c-2d)}{\lambda^3}.$$

Изъ рѣшенія уравненій (9) получаемъ для опорнаго момента M_i въ продольной балкѣ выраженіе такого вида:

$$(12)\qquad M_i = \beta_{i1} Z_1 + \beta_{i2} Z_2 + \beta_{i3} Z_3 + \ldots + \beta_{ir} Z_r + \ldots + \beta_{i(n-1)} Z_{n-1};$$

затѣмъ получаемъ моментъ, зависящій отъ неравномѣрнаго нагрѣванія главной фермы:

$$(13)\qquad M_i = \frac{6\,\varepsilon EJ(t_u-t_o)}{h}\,[\beta_{i1} + \beta_{i2} + \ldots + \beta_{ir} + \ldots + \beta_{i(n-1)}].$$

Вліяніе грузовъ P на величину M_i опредѣляется проще всего графически. Если бы имѣли

(14) $$Z_r = -6\left(\frac{\mathfrak{L}_{or}}{\lambda^2} + \frac{\mathfrak{R}_{o(r+1)}}{\lambda^2}\right) - \alpha\lambda\,(C_{o(r-1)} - 2C_{or} + C_{o(r+1)}),$$

то способъ, указанный въ № 24, можно было бы примѣнить цѣликомъ и къ данному случаю; тогда для линій количествъ ζ_i и η_i имѣли бы мѣсто уравненія 24 до 27.

Здѣсь же имѣется значеніе

(15) $$Z_r = \varkappa_r\,(M'_{r-1} + 4M'_r + M'_{r+1}),$$

поэтому теперь спрашивается, какое вліяніе оказываетъ это приращеніе на моментъ M_i.

Опредѣляя Z_1 до Z_{n-1} изъ формулы 15, увидимъ, что уравненіе (12) обратится въ слѣдующее:

$$M_i = \Sigma\beta_{ir}\varkappa_r\,(M'_{r-1} + 4\,M'_r + M'_{r+1});$$

если написать это выраженіе по порядку моментовъ . . . M_{r-1}, M M_{r+1}, . . . то уравненіе приметъ видъ

(16) $$M_i = \Sigma M'_r\,(\beta_{i(r-1)}\varkappa_{r-1} + 4\beta_{ir}\varkappa_r + \beta_{i(r+1)}\varkappa_{r+1}),$$

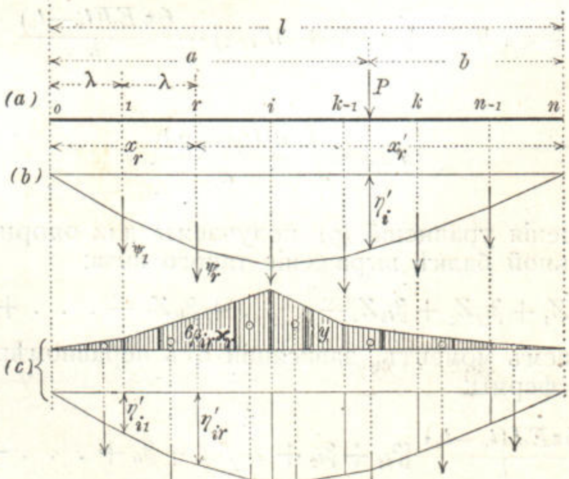
гдѣ первый членъ читается такъ: $M_1'\,(4\beta_{i1}\varkappa_1 + \beta_{i2}\varkappa_2)$, а послѣдній:

$$M'_{n-1}(\beta_{i(n-2)}\varkappa_{n-2} + 4\beta_{i(n-1)}\varkappa_{n-1}).$$

Положимъ теперь, что грузъ P, перемѣщающійся по продольной балкѣ, находится въ панели k, фиг. 88 а. Тогда

$$\text{для } r < k-1 \qquad M'_r = \frac{Pb}{l}\,x_r$$

$$\text{для } r > k \qquad M'_r = \frac{Pa}{l}\,x'_r,$$



Фиг. 88.

а если ввести, ради краткости въ письмѣ, обозначенiе

$$\beta_{i(r-1)}\varkappa_{r-1} + 4\beta_{ir}\varkappa_r + \beta_{i(r+1)}\varkappa_{r+1} = \psi_{ir}, \tag{17}$$

то получимъ

$$M_i = \left(\frac{b}{l}\sum_{o}^{k-1}\psi_{ir}x_r + \frac{a}{l}\sum_{k}^{n-1}{}_{ir}x'_r\right)P = P\eta'_i, \tag{18}$$

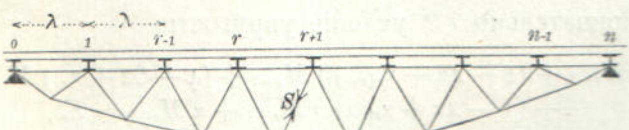
гдѣ η'_i означаетъ измѣренную подъ грузомъ P ординату веревочнаго многоугольника, построеннаго при полюсномъ разстоянiи 1 для грузовъ ψ_{i_1}, ψ_{i_2}, . . . ψ_{ir}, . . . $\psi_{i(n-1)}$, приложенныхъ къ узламъ 1, 2, . . . r, . . . $(n-1)$, фиг. 88 b. Къ тому же результату придемъ и въ томъ случаѣ, если среднiя высоты y отдѣльныхъ трапецiй, фиг. 88 с, опредѣляемыхъ ординатами $6\beta_{ir}\varkappa_{ir}$, нанесенными по опорнымъ вертикалямъ, принять за вертикальныя силы, приложенныя къ центрамъ тяжести трапецiй, соединить эти силы веревочнымъ многоугольникомъ съ полюснымъ разстоянiемъ 1 и вписать въ этотъ многоугольникъ второй многоугольникъ, вершины котораго лежали бы подъ узловыми точками. Чтобъ убѣдиться въ этомъ, примемъ заштрихованную на фиг. 87 с площадь за грузовую площадь и распредѣлимъ ее по узламъ. На узелъ r придется

$$\frac{1}{3}6\beta_{i(s-1)}\varkappa_{(r-1)}\frac{\lambda}{2} + \frac{4}{3}6\beta_{ir}\varkappa_{ir}\frac{\lambda}{2} + \frac{1}{3}6\beta_{i(r+1)}\varkappa_{i(r+1)}\frac{\lambda}{2} = \psi_{ir}\lambda;$$

это выраженiе надо раздѣлить на λ, если только величины площадей трапецiй должны быть замѣнены средними высотами. Вписыванiя многоугольника въ веревочный многоугольникъ на фиг. 87 с можно и не дѣлать, потому что для насъ достаточно только опредѣлить ординаты η'_{i_1}, η'_{i_2}, . . . η'_{ir}, . . . , $\eta'_{i(n-1)}$, соотвѣтствующiя узловымъ точкамъ. Дѣйствительно, при изслѣдованiи влiянiя членовъ $Z_r = \varkappa_r\,(M'_{r+1} + 4\,M'_{r+1} + M'_{r+1})$, мы увеличивали количества η_i, йденныя въ № 25, на соотвѣтствующiя величины η'_i. *Такимъ образомъ вмѣсто многоугольника количествъ η_i при прежнемъ изслѣдованiи теперь является многоугольникъ количествъ* $(\eta_i + \eta'_i)$.

Количества ψ_{ir}, а также среднiя высоты y грузовыхъ трапецiй, фиг. 87 с, представляютъ собою *числа*. Взявъ для полюснаго разстоянiя соотвѣтствующаго веревочнаго многоугольника число 1, получимъ отрѣзки η_i въ томъ же масштабѣ, въ которомъ построены пролеты λ. Если желаемъ изобразить ординаты η' (обыкновенно небольшiя по величинѣ) въ ν-разъ большемъ масштабѣ, чѣмъ масштабъ для λ, то для полюснаго разстоянiя надо взять $1 : \nu$.

28. Промежуточная (продольная) балка рѣшетчатаго балочнаго моста, фиг. 89. Пусть длина панелей λ всюду одинакова; примемъ, что поперечныя балки лежатъ непосредственно на



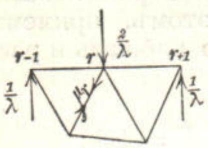
Фиг. 89.

главныхъ фермахъ. Расчетъ промежуточной (продольной) балки будетъ отличаться отъ изслѣдованій, сдѣланныхъ въ № 27, только тѣмъ, что грузъ w_r надо опредѣлять не по уравненію 6, а съ помощью выраженія, выведеннаго на стр. 11 (выпускъ VII), уравн. 5)

$$w_r = \Sigma\, \mu_r\, \Delta s\,, \tag{19}$$

гдѣ μ_r означаетъ усиліе въ какомъ нибудь стержнѣ рѣшетки отъ дѣйствія состоянія нагрузки $\overline{M}_r = 1$ (представлено на фиг. 90) и Δs означаетъ дѣйствительное измѣненіе длины стержня. Для стержня, не входящаго въ фиг. 90, имѣемъ $\mu_r = 0$. Усилія въ стержняхъ рѣшетки можно представить теперь какъ линейныя функціи узловыхъ моментовъ $\ldots \overline{M}_{r-1},\ \overline{M}_r,\ \overline{M}_{r+1} \ldots$; они напишутся въ такой формѣ:

$$S = \ldots \mu_{r-1}\,\overline{M}_{r-1} + \mu_r \overline{M}_r + \mu_{r+1}\,\overline{M}_{r+1} + \ldots; \tag{20}$$



Фиг. 90.

для частнаго случая рѣшетки, состоящей изъ соединеннаго ряда треугольниковъ, каждое усиліе S зависитъ по крайней мѣрѣ отъ трехъ моментовъ для трехъ смежныхъ узловъ, а для данной рѣшетки безъ стоекъ — по крайней мѣрѣ отъ двухъ моментовъ *). Поэтому въ уравненіи 19 можно положить

$$\Delta s = \frac{Ss}{EF} + \varepsilon t s$$

$$= \frac{s}{EF}\left(\mu_{r-1}\,\overline{M}_{r-1} + \mu_r\,\overline{M}_r + \mu_{r+1}\,\overline{M}_{r+1}\right) + \varepsilon t s\,,$$

и тогда получимъ:

$$\frac{6EJw_r}{\lambda} = \varkappa_{r(r-1)}\,\overline{M}_{r-1} + \varkappa_{rr}\,\overline{M}_r + \varkappa_{r(r+1)}\,\overline{M}_{r+1} + \frac{6\varepsilon EJ}{\lambda}\,\Sigma \mu_r t s, \tag{21}$$

гдѣ

$$\varkappa_{r(r-1)} = \frac{6\,J}{\lambda}\,\Sigma \mu_{r-1}\mu_r\,\frac{s}{F};\quad \varkappa_{rr} = \frac{6\,J}{\lambda}\,\Sigma \mu^2\,\frac{s}{F}; \tag{22}$$

$$\varkappa_{r(r+1)} = \frac{6\,J}{\lambda}\,\Sigma \mu_r \mu_{r+1}\,\frac{s}{F}.$$

Обративъ вниманіе на то, что

$$\overline{M} = M'_r - M_r\,,$$

найдемъ окончательно r^{oe} условіе упругости:

$$\begin{aligned} \alpha M_{r-2} &+ (1 - 4\alpha + \varkappa_{r(r-1)})\, M_{r-1} + (4 + 6\alpha + \varkappa_{rr})\, M_r \\ &+ (1 - 4\alpha + \varkappa_{r(r+1)})\, M_{r+1} + \alpha\, M_{r+2} = Z_r\,, \end{aligned} \tag{23}$$

---

*) См. § 16 въ концѣ выпуска IX.

гдѣ

$$(24)\qquad Z_r = -6\left(\frac{\mathfrak{L}_{or}}{\lambda^2} + \frac{\mathfrak{R}_{o\,(r+1)}}{\lambda^2}\right) - \alpha\lambda\left(C_{0(r-1)} - 2C_{or} + C_{0(r+1)}\right)$$

$$+ \varkappa_{r(r-1)} M'_{r-1} + \varkappa_{rr} M'_r + \varkappa_{r(r+1)} M'_{r+1} + \frac{6\varepsilon EJ}{\lambda} \Sigma\mu_r ts$$

и

$$(25)\qquad \alpha = 2\,\frac{J}{J_q}\,\frac{d^2(3c-2d)}{\lambda^3}\,.$$

Получивъ такимъ образомъ для какого нибудь опорнаго момента M_i выраженіе

$$M_i = \beta_{i_1} Z_1 + \beta_{i_2} Z_2 + \beta_{i_3} Z_3 + \ldots + \beta_{i(n-1)} Z_{n-1},$$

мы найдемъ значеніе, соотвѣтствующее неравномѣрному нагрѣванію главной фермы:

$$(26)\qquad M_i = \frac{6\varepsilon EJ}{\lambda}\left[\beta_{i_1}\Sigma\mu_1 ts + \beta_{i_2}\Sigma\mu_2 ts + \ldots + \beta_{i(n-1)}\Sigma\mu_{n-1} ts\right].$$

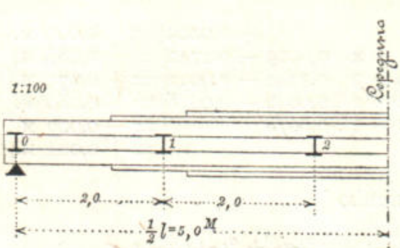
Линія вліянія для количества M_i опредѣляется по способу, описанному въ № 2; грузы же ψ надо вычислить съ помощью уравненія

$$(27)\qquad \psi_{ir} = \beta_{i(r-1)}\varkappa_{r(r-1)} + \beta_{ir}\varkappa_{rr} + \beta_{i(r+1)}\varkappa_{r(r+1)}\,.$$

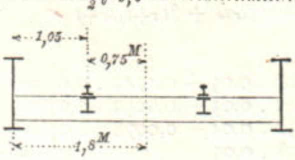
Численный примѣръ.

Имѣемъ мостъ со сплошными фермами, пролетъ 10 м., длина панели 2 м., ширина 3,6 м., фиг. 91 и 92. Главная ферма состоитъ изъ вертикальнаго листа (820 . 10 мм.), четырехъ уголковъ (100 . 100 . 13 мм.) и поясныхъ листовъ (210 . 13 мм.) моментъ инерціи площади поперечнаго сѣченія равняется:

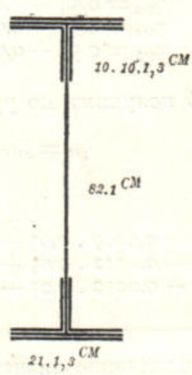
при двухъ листахъ въ каждомъ поясѣ . .	376 000 см^4.
при одномъ листѣ " " " . .	275 000 "
безъ листовъ	181 000 "



Фиг. 91.



Фиг. 92.



Фиг. 93.

Моменты инерціи для продольной и поперечной балки (нормальныя профили № 32 и соотвѣтственно № 45) равны

$$J = 12\,600 \text{ и соотвѣтственно } J_2 = 46\,200 \text{ см}^4.$$

Длина поясныхъ листовъ показана на фиг. 91.

При опредѣленіи чиселъ $\varkappa$ пусть для узловыхъ точекъ 1 и 2 будутъ приписаны значенія $J_1 = 250\,000$ и $J_2 = 376\,000$, какъ моменты инерціи поперечныхъ сѣченій главной фермы; положимъ такимъ образомъ:

$$\varkappa_1 = \frac{12\,600}{250\,000} = 0{,}05 = \varkappa_4,$$

$$\varkappa_2 = \frac{12\,600}{376\,000} = 0{,}03 = \varkappa_3 \text{ *)}.$$

По фиг. 92 $d = 1{,}05$ м., $c = 1{,}8$ м., слѣдовательно

$$\alpha = 2\,\frac{J}{J_q}\,\frac{d^2(3c-d)}{\lambda^3} = 2\,\frac{12\,600}{46\,200}\,\frac{1{,}05^2(3\,.\,1{,}8-2\,.\,1{,}05)}{2{,}0^3} = 0{,}25.$$

Условія упругости для вычисленія опорныхъ моментовъ продольной балки напишутся въ такой формѣ:

$$\begin{aligned}
&M_1(4+6\alpha+4\varkappa_1)+M_2(1-4\alpha+\varkappa_1)+\alpha M_3 = Z_1\\
M_1(1-4\alpha+\varkappa_2)+{}&M_2(4+6\alpha+4\varkappa_2)+M_3(1-4\alpha+\varkappa_2)+\alpha M_4 = Z_2\\
\alpha M_1+M_2(1-4\alpha+\varkappa_3)+{}&M_3(4+6\alpha+4\varkappa_3)+M_4(1-4\alpha+\varkappa_3) = Z_3\\
\alpha M_2+M_3(1-4\alpha+\varkappa_4)+{}&M_4(4+6\alpha+4\varkappa_4) = Z_4;
\end{aligned}$$

изъ этихъ уравненій получаемъ, напр., для M_2 (этимъ изслѣдованіемъ здѣсь и ограничимся) значеніе

$$M_2 = -0{,}0009\,Z_1 + 0{,}1742\,Z_2 + 0{,}0032\,Z_3 - 0{,}0078\,Z_4,$$

такимъ образомъ:

$$\beta_{2\cdot1} = -0{,}0009;\quad \beta_{2\cdot2} = +0{,}1742;\quad \beta_{2\cdot3} = +0{,}0032;\quad \beta_{2\cdot4} = -0{,}0078.$$

Съ помощью формулы

$$\eta_{ir} = \alpha\lambda\,(-\beta_{i(r-1)} + 2\,\beta_{ir} - \beta_{i(r+1)})$$

мы получимъ теперь (принявъ во вниманіе, что $\alpha.\lambda = 0{,}25\,.\,2{,}0 = 0{,}5$ м.):

$$\begin{aligned}
\eta_{2\cdot0} &= 0{,}5\,[\quad +0{,}0009] = 0{,}000 \text{ м.}\\
\eta_{2\cdot1} &= 0{,}5\,[\quad -2\,.\,0{,}0009 - 0{,}1742] = -0{,}088 \text{ м.}\\
\eta_{2\cdot2} &= 0{,}5\,[+0{,}0009 + 2\,.\,0{,}1742 - 0{,}0032] = +0{,}173 \text{ м.}\\
\eta_{2\cdot3} &= 0{,}5\,[-0{,}1742 + 2\,.\,0{,}0032 + 0{,}0078] = -0{,}080 \text{ м.}\\
\eta_{2\cdot4} &= 0{,}5\,[-0{,}0032 - 2\,.\,0{,}0078\quad] = -0{,}009 \text{ м.}\\
\eta_{2\cdot5} &= 0{,}5\,[+0{,}0078\quad] = +0{,}004 \text{ м.};
\end{aligned}$$

для грузовъ ψ получимъ по уравненію

$$\psi_{ir} = \beta_{i(r-1)}\varkappa_{r-1} + 4\beta_{ir}\varkappa_r + \beta_{i(r+1)}\varkappa_{r+1}$$

значенія

$$\begin{aligned}
\psi_{2\cdot1} &= \quad -4\,.\,0{,}0009\,.\,0{,}05 + 0{,}1742\,.\,0{,}03 = +0{,}005046\\
\psi_{2\cdot2} &= -0{,}0009\,.\,0{,}05 + 4\,.\,0{,}1742\,.\,0{,}03 + 0{,}0032\,.\,0{,}03 = +0{,}020955\\
\psi_{2\cdot3} &= +0{,}1742\,.\,0{,}03 + 4\,.\,0{,}0032\,.\,0{,}03 - 0{,}0078\,.\,0{,}05 = +0{,}005220\\
\psi_{2\cdot4} &= +0{,}0032\,.\,0{,}03 - 4\,.\,0{,}0078\,.\,0{,}05 = -0{,}001464.
\end{aligned}$$

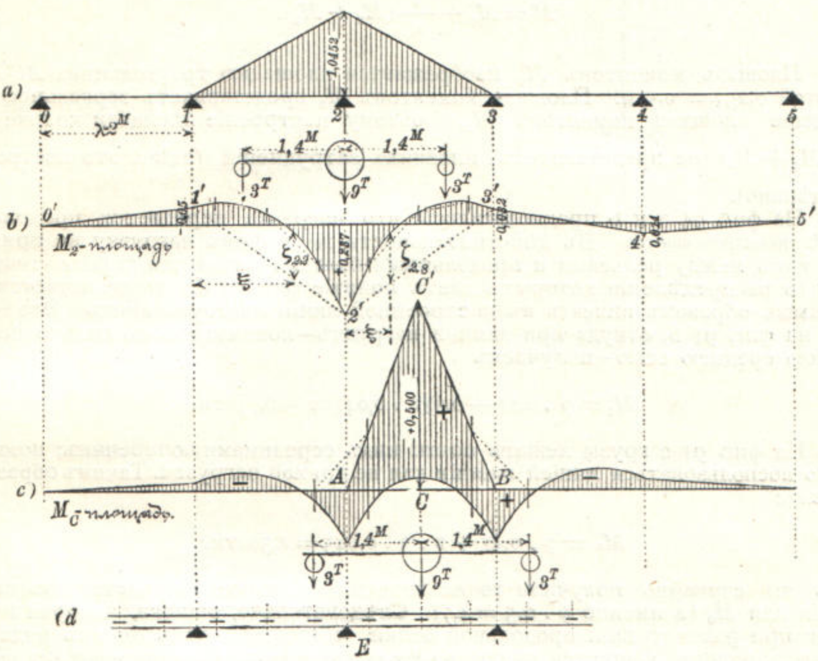
*) Ср. примѣненіе значеній $\varkappa_r$ на стр. 76. Округленіе здѣсь вполнѣ допустимо, потому что вліяніе чиселъ $\varkappa$ очень ничтожно.

Если принять, что продольная балка (фиг. 94) опирается на опоры 0 и 5 и что въ точкахъ 1, 2, 3, 4 приложены грузы $\psi_{2\cdot1}$, $\psi_{2\cdot2}$, $\psi_{2\cdot3}$, $\psi_{2\cdot4}$, то для сѣченій 1, 2, 3, 4 найдемъ моменты:

$$\eta'_1 = +0{,}037,\ \eta'_2 = +0{,}064,\ \eta'_3 = +0{,}048,\ \eta'_4 = +0{,}014\ ^{*)},$$

поэтому ординаты многоугольника количествъ $(\eta + \eta')$ (т. е. многоугольника $0'\,1'\,2'\,3'\,4'\,5'$, на фиг. 94 b) будутъ равняться:

$$\begin{aligned}
\eta_1 + \eta'_1 &= +0{,}088 + 0{,}037 = -0{,}051 \text{ м.}\\
\eta_2 + \eta'_2 &= +0{,}173 + 0{,}064 = +0{,}237 \text{ м.}\\
\eta_3 + \eta'_3 &= -0{,}080 + 0{,}048 = -0{,}032 \text{ м.}\\
\eta_4 + \eta'_4 &= -0{,}009 + 0{,}023 = +0{,}014 \text{ м.}\\
\eta_5 + \eta'_5 &= +0{,}004 \qquad\qquad\ \, = +0{,}004 \text{ м. (ничтожно).}
\end{aligned}$$



Фиг. 94.

Отложивъ отъ этой ломанной линіи ординаты кривыхъ количествъ ζ_2 по отрицательному направленію (см. фиг. 75 на стр. 67), получимъ линію вліянія для искомаго опорнаго момента. *Вычислимъ* эту кривую съ помощью формулы

$$\zeta_{ir} = (\beta_{i(r-1)} \operatorname{tg} \varphi_L + \beta_{ir} \operatorname{tg} \varphi_R)\,\lambda$$

и тотчасъ же увидимъ, что въ виду ничтожности величинъ $\beta_{2\cdot1}$, $\beta_{2\cdot3}$ и $\beta_{2\cdot4}$ (которыя могутъ быть приравнены нулю) имѣютъ вліяніе только значенія $\zeta_{2\cdot2}$ и $\zeta_{2\cdot3}$ зависящія отъ $\beta_{2\cdot2}$ $^{**)}$.

Такъ какъ $\beta_{ir}\lambda = 0{,}1742 \,.\, 2 = 0{,}3484$ и кромѣ того

$$\zeta_{2\cdot2} = 0{,}3484 \operatorname{tg} \varphi_R \ \text{ и } \ \zeta_{2\cdot3} = 0{,}3484 \operatorname{tg} \varphi_L\,,$$

---

*) При равныхъ панеляхъ авторъ совѣтуетъ опредѣлять моменты η' отъ грузовъ ψ всегда *вычисленіемъ*. Количества η' выражаются въ метрахъ.

**) Линія количествъ ζ для панели находится графически, на стр. 71, какъ линія моментовъ для грузовой площади—треугольника съ высотой $6\,\beta_{2\cdot2} = 1{,}0452$.

то для 4 точекъ дѣленія панели на 5 равныхъ частей, принимая во вниманіе численныя значенія на стр. 41, получаемъ

для $\frac{\xi}{\lambda} = 0{,}2$	$\xi_{2\cdot 2} = 0{,}3484 \,.\, 0{,}1920 = 0{,}067$ м.	$\xi_{2\cdot 3} = 0{,}100$ м.
$= 0{,}4$	$= 0{,}3484 \,.\, 0{,}3360 = 0{,}117$ „	$= 0{,}134$ „
$= 0{,}6$	$= 0{,}3484 \,.\, 0{,}3840 = 0{,}134$ „	$= 0{,}117$ „
$= 0{,}8$	$= 0{,}3484 \,.\, 0{,}2880 = 0{,}100$ „	$= 0{,}067$ „

Заштрихованныя площади на фиг. 94 представляютъ полученныя такимъ образомъ площади вліянія для количества M_2.

На фиг. 94 с построена площадь вліянія для изгибающаго момента въ серединѣ панели 2—3; выражается этотъ моментъ формулой

$$M = M_0 + \frac{1}{2}(M_2 + M_3).$$

Площадь моментовъ M_0 изображается площадью треугольника ACB съ высотой $0{,}25\,\lambda = 0{,}5$ м. Площадь моментовъ M_3 представляетъ зеркальное изображеніе площади моментовъ M_2, поэтому построеніе площади количествъ $\frac{1}{2}(M_2 + M_3)$ не представляетъ никакихъ затрудненій (здѣсь это построеніе не сдѣлано).

На фиг. 94 a и b предполагалось, что нагрузка передается продольной балкѣ *непосредственно*. Въ дѣйствительности же имѣемъ нагрузку не прямую, такъ какъ между рельсами и продольными балками находятся шпалы—поперечины (о распредѣленіи которыхъ даетъ понятіе фиг. 94 d); тогда остается извѣстнымъ образомъ вписать въ построенной линіи многоугольникъ. Это сдѣлано на фиг. 94 b, откуда при данной нагрузкѣ—локомотивъ съ сильно нагруженною среднею осью—получаемъ *)

$$M_2 = 9 \,.\, 0{,}11 - 0{,}3\,(2 \,.\, 0{,}04) = +\,0{,}75 \text{ тм.}$$

На фиг. 94 с грузы лежатъ почти надъ серединами поперечинъ; поэтому можно воспользоваться линіей вліянія для не прямой нагрузки. Такимъ образомъ найдемъ:

$$M_c = 9 \,.\, 0{,}47 + 2 \,.\, 3 \,.\, 0{,}045 = 4{,}50 \text{ тм.};$$

здѣсь мы случайно получили то же значеніе, которое получается изъ линіи вліянія для M_0 (а именно $9 \,.\, 0{,}5 = 4{,}5$). Слѣдовательно, ошибка, которая получается при разсмотрѣніи продольной балки, состоящей какъ бы изъ ряда отдѣльныхъ балокъ равняется нулю; ***во всѣхъ примѣрахъ, которые пришлось расчитывать автору, эта ошибка получалась ничтожною.*** Вліяніе неравномѣрнаго нагрѣванія главныхъ фермъ на моменты M_2 и M_3, а также на моментъ M_c выражается такъ:

$$M_{2t} = M_{3t} = M_{ct} = (\beta_{2\cdot 1} + \beta_{2\cdot 2} + \beta_{2\cdot 3} + \beta_{2\cdot 4})\frac{6\,\varepsilon EJ\,(t_u - t_o)}{h}\;{}^{**)}$$

$$= 0{,}17\;\frac{6 \,.\, 24 \,.\, 12\,600}{84}\,(t_u - t_o),$$

куда надо подставить вмѣсто h среднее значеніе 84 см. и $\varepsilon E = 24$ к/см². При $t_u - t_o = 15^\circ$ получаемъ

$$M_{2t} = M_{3t} = M_{ct} = 55\,080 \text{ксм.} = 0{,}55 \text{ тм.},$$

---

*) На фиг. 94 взятъ особенно невыгодный случай нагрузки. Силы въ 3 и 9 тоннъ представляютъ давленія, приходящіяся на *колеса*, а не на *оси*. Постоянной нагрузкой можно пренебречь.

**) Достаточно точное приближеніе напишется въ такомъ видѣ:

$$M_t = \frac{\alpha\,\varepsilon EJ\,(t_u - t_o)}{(4 + 6\alpha + \varkappa_2)h} = 0{,}18 \,.\, \frac{6\,EJ\,(t_u - t_o)}{h}.$$

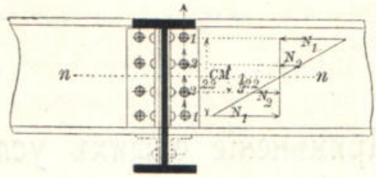
поэтому окончательно найдемъ:

$$M_2 = +0{,}75 + 0{,}55 = 1{,}3 \text{ тм.} \quad \text{и} \quad Mc = +4{,}50 + 0{,}55 = 5{,}1 \text{ тм.}$$

Моментъ сопротивленія продольной балки (нормальная профиль № 32) $W = 790$, поэтому напряженіе составляетъ

$$\sigma = \frac{510\,000}{790} = 630 \text{ к/см}^2.$$

Вычисленіе момента M_2 необходимо для расчета заклепочнаго соединенія, фиг. 95. Заклепки 1 и 2, прикрѣпляющія продольную балку къ уголкамъ, работаютъ двумя плоскостями перерѣзыванія; пусть усилія, приходящіяся на заклепки, равняются N_1 и N_2, причемъ можно принять, что



Фиг. 95.

$$N_2 : N_1 = \frac{22}{3} : 22 = 1 : 3.$$

Тогда получаемъ

$$N_1 \cdot 22 + \frac{N_1}{3} \cdot \frac{22}{3} = 130\,000 \text{ к.см.},$$

откуда

$$N_1 = 5\,320 \text{ к.}$$

Толщина стѣнки продольной балки составляетъ 1,15 см.; діаметръ заклепки 2 см., поэтому давленіе на стѣнку заклепочнаго отверстія равняется:

$$\frac{5\,320}{2 \cdot 1{,}15} = 2\,320 \text{ к./см}^2.,$$

а среднее напряженіе при перерѣзываніи заклепки (площадь сѣченія = 3,14 см.²) равняется

$$\frac{5\,320}{2 \cdot 3{,}14} = 850 \text{ к./см}^2.$$

Заклепки, прикрѣпляющія уголки къ поперечной балкѣ, работаютъ ниже линіи $n - n$ на *растяженіе* въ продольномъ направленіи и наибольшее усиліе равняется

$$\frac{1}{2} N_1 = 2660 \text{ к.}$$

Напряженіе при растяженіи составитъ

$$\sigma = \frac{2660}{3{,}14} = 850 \text{ к./см}^2.$$

Кромѣ того заклепки получаютъ напряженія отъ вертикальнаго давленія A, производимаго продольной балкой на поперечную *). Для опредѣленія этого давленія передвинемъ локомотивъ вправо до тѣхъ поръ, пока грузъ 9 т. не придется надъ поперечиной E (фиг. 94 d); примемъ продольную балку за отдѣльную балку и найдемъ $A = \frac{5}{6} \cdot 9 = 7{,}5$ т. Дѣйствительное давленіе A будетъ нѣсколько меньше, такъ какъ моментъ M_2 сохраняетъ опредѣленное ранѣе положительное значеніе. На каждую изъ четырехъ заклепокъ, перерѣзываемыхъ по двумъ плоскостямъ, приходится усиліе $\frac{1}{4} \cdot 7{,}5 = 1{,}9$ т., а потому

---

*) Это добавочное напряженіе уменьшается путемъ приклепыванія кусковъ уголковъ подъ продольной балкой (на фиг. 95 показано пунктиромъ).

это усиліе вмѣстѣ съ усиліемъ N_1 даетъ равнодѣйствующую $N = \sqrt{1{,}9^2 + 5{,}3^2} = 5{,}6$ т.
Давленіе на поверхность отверстія увеличится теперь до $\frac{5600}{2 \cdot 1{,}15} = 2440$ к./см².,
а напряженіе при перерѣзываніи заклепки увеличится до $\frac{5600}{2 \cdot 3{,}14} = 900$ к./см².
Такимъ образомъ расчетъ этотъ показываетъ, что напряженія при подобныхъ соединеніяхъ довольно значительны.

---

§ 8.

Примѣненіе общихъ условій упругости къ статически неопредѣлимымъ балкамъ.

29. Въ началѣ 2-го тома (а именно въ выпускѣ VI) было приведено общее изслѣдованіе статически неопредѣлимыхъ фермъ, сдѣланное на основаніи закона возможныхъ перемѣщеній. Для вычисленія статически неопредѣлимыхъ величинъ X_a, X_b, X_c . . . были выведены такія уравненія:

$$(1)\quad \begin{cases} L_a - \delta_{at} + \delta_a = \Sigma P_m \delta_{ma} - \delta_{aa} X_a - \delta_{ba} X_b - \delta_{ca} X_c - \delta_{da} X_d - \ldots \\ L_b - \delta_{bt} + \delta_b = \Sigma P_m \delta_{mb} - \delta_{ab} X_a - \delta_{bb} X_b - \delta_{cb} X_c - \delta_{db} X_d - \ldots \\ L_c - \delta_{ct} + \delta_c = \Sigma P_m \delta_{mc} - \delta_{ac} X_a - \delta_{bc} X_b - \delta_{cc} X_c - \delta_{dc} X_d - \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Здѣсь означаютъ δ_a, δ_b, δ_c, . . . пути нагрузокъ X_a, X_b, X_c, . . статически опредѣлимой главной фермы, δ_m—путь данной нагрузки P_m *),

δ_{ma}—вліяніе причины $X_a = -1$ на путь δ_m
δ_{mb}— „ „ $X_b = -1$ „ „ и т. д.
δ_{aa}— „ „ $X_a = -1$ „ δ_a
δ_{ab}— „ „ $X_b = -1$ „ δ_b и т. д.

δ_{at} вліяніе на путь δ_a измѣненія температуры статически опредѣлимой главной фермы, причемъ это измѣненіе соотвѣтствуетъ не напряженному состоянію.

L_a означаетъ ту возможную работу, которая получится, если сопротивленія опоръ, вызываемыя причиною $X_a = -1$ въ статически опредѣлимой главной фермѣ, умножить на проекціи *дѣйствительнаго* перемѣщенія точекъ приложенія этихъ силъ, и т. д.

Уравненія (1) были выведены сначала (въ выпускѣ VI) для рѣшетки; для поясненія теоріи былъ сдѣланъ также одинъ примѣръ. На стр. 40 и 41 (выпускъ VI) эти уравненія выведены кратчайшимъ

---

*) Понятія „нагрузка“ и „путь нагрузки“ объяснены во введеніи на стр. 37 (выпускъ VI).

путемъ съ помощью теоремы *Максуелля* ($\delta_{mn} = \delta_{nm}$). Затѣмъ на стр. 51, 52 и 53. (выпускъ VI) была доказана примѣнимость теоремы Максуелля къ твердымъ изотропнымъ тѣламъ, а отсюда уже можно заключить о примѣнимости уравненій (1) къ статически неопредѣлимымъ сплошнымъ фермамъ съ неизмѣннымъ закрѣпленіемъ опоръ *) и съ неизмѣннымъ сочлененіемъ частей фермы.

Дальнѣйшія примѣненія, которыя мы сдѣлаемъ сначала въ общихъ чертахъ **), покажутъ, что опредѣленіе величинъ X съ помощью уравненій (1) отличается общностью и чрезвычайною наглядностью.

30. Опредѣленіе сопротивленій опоръ съ помощью уравненій (1). Если въ горизонтальной балкѣ (фиг. 96), лежащей на 5 опорахъ и находящейся подъ дѣйствіемъ вертикальныхъ грузовъ P_m, принять за статически неопредѣлимыя величины сопротивленія X_a, X_b, X_c среднихъ опоръ, то статически опредѣли-

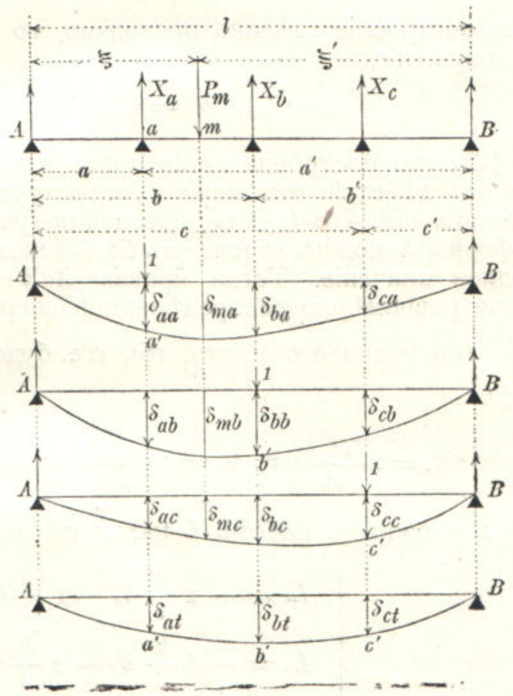
Фиг. 96.

Фиг. 97.

Фиг. 98.

Фиг. 99.

Фиг. 100.



мая главная ферма будетъ представлять изъ себя простую балку AB, находящуюся подъ дѣйствіемъ силъ P_m и X_a, X_b, X_c. Обозначимъ пониженіе опорныхъ точекъ A, a, b, c, B буквами δ_A, δ_a, δ_b, δ_c, δ_B.

На фиг. 97, 98 и 99 представлены состоянія нагрузокъ $X_a = -$ ..,

*) См. введеніе, стр. 13 и 14 (выпускъ VI).

**) Подробный примѣръ будетъ описанъ въ § 9 (на нѣмецкомъ языкѣ этотъ отдѣлъ еще не напечатанъ).

$X_b = -1$ и $X_c = -1$; въ первомъ случаѣ грузъ 1, приложенный къ a, вызываетъ въ опорахъ A и B сопротивленія $1\frac{a'}{l}$ и $1\frac{a}{l}$, во второмъ случаѣ: $1\frac{b'}{l}$ и $1\frac{b}{l}$ и т. д.

$Aa'B$	будетъ линіей прогибовъ для состоянія	$X_a = -1$
$Ab'B$	„ „ „ „ „	$X_b = -1$
$Ac'B$	„ „ „ „ „	$X_c = -1$.

Эти линіи построены по способу, описанному въ § 2; съ помощью этихъ линій находимъ прогибы:

$$\begin{array}{cccc} \delta_{aa}, & \delta_{ba}, & \delta_{ca}, & \delta_{ma}, \\ \delta_{ab}, & \delta_{bb}, & \delta_{cb}, & \delta_{mb}, \\ \delta_{ac}, & \delta_{bc}, & \delta_{cc}, & \delta_{mc}. \end{array}$$

Если построеніе сдѣлано правильно, то по теоремѣ Максуелля должно получиться:

$$\delta_{ba} = \delta_{ab}, \quad \delta_{cb} = \delta_{bc}, \quad \delta_{ca} = \delta_{ac}.$$

На фиг. 100 построена линія прогибовъ $Aa'b'c'B$, которая получается отъ дѣйствія измѣненія температуры; эта линія построена въ предположеніи, что $t_u > t_o$; изъ нея получаемъ δ_{at}, δ_{bt}, δ_{ct}. Для высоты фермы h можно ввести, въ большинствѣ случаевъ, постоянное среднее значеніе. Тогда кривая $Aa'b'c'B$ будетъ веревочной кривой для равномѣрно распредѣленной нагрузки, высота которой $= \varepsilon \frac{t_u - t_o}{h}$ (по уравненію 1, стр. 16), т. е. будетъ параболой; затѣмъ получимъ:

$$\delta_{at} = \varepsilon \frac{t_u - t}{2h} aa'; \quad \delta_{bt} = \varepsilon \frac{t_u - t_o}{2h} bb'; \quad \delta_{ct} = \varepsilon \frac{t_u - t_o}{2h} cc'. \tag{2}$$

Для возможныхъ работъ L находимъ выраженія:

$$\left\{ \begin{aligned} L_a &= -1\frac{a'}{l}\delta_A - 1\frac{a}{l}\delta_B \\ L_b &= -1\frac{b'}{l}\delta_A - 1\frac{b}{l}\delta_B \\ L_c &= -1\frac{c'}{l}\delta_A - 1\frac{c}{l}\delta_B; \end{aligned} \right. \tag{3}$$

осталось еще задать величины перемѣщеній δ_A, δ_B, δ_a, δ_b, δ_c.

Въ балкахъ, лежащихъ на каменныхъ опорахъ или на короткихъ желѣзныхъ стойкахъ, перемѣщеніями опоръ можно, въ большинствѣ случаевъ, пренебречь; тогда надо положить $\delta_A = \delta_B = \delta_a = \delta_b = \delta_c = 0$.

Если желаемъ ввести въ расчетъ перемѣщенія опоръ, найденныя изъ наблюденій или просто заданныя, то эти перемѣщенія слѣдуетъ отнести къ прямой AB, какъ къ нулевой оси, т. е. надо положить, что $\delta_A = \delta_B = 0$.

Если балка подпирается въ точкѣ a длинною стойкою (колонною), то по уравн. (2), стр. 59 (значенія буквъ указаны тамъ же), надо положить:

$$\delta_a = -\varepsilon t_a h_a + \frac{X_a h_a}{E_a F_a}.$$

Если балка опирается на понтонъ, то по уравн. (3), стр. 60, имѣемъ

$$\delta_a = \delta'_a + \frac{X_a}{\gamma F_a},$$

гдѣ δ_a' означаетъ перемѣщеніе точки a, не зависящее отъ X_a, напр. вліяніе пониженія уровня воды, или измѣненіе глубины погруженія понтона отъ непосредственной загрузки его. Когда точки A и B получаютъ перемѣщенія, зависящія отъ давленій на опоры A и B, т. е. когда, напр., $\delta_A = \delta'_A + \frac{A}{\gamma F_A}$ (свободно плавающая часть понтоннаго моста), тогда A и B должны выразиться, конечно, въ функціи силъ X_a, X_b, X_c. А именно мы получимъ:

$$(4) \quad \left| \begin{aligned} A &= \Sigma \frac{P_m \xi'}{l} - X_a \frac{a'}{l} - X_b \frac{b'}{l} - X_c \frac{c'}{l} \\ B &= \Sigma \frac{P_m \xi}{l} - X_a \frac{a}{l} - X_b \frac{b}{l} - X_c \frac{c}{l}. \end{aligned} \right.$$

Количества X_a, X_b, X_c можно вычислить теперь изъ уравненій (1): такимъ образомъ задача наша рѣшена.

31. Примѣненіе къ статически неопредѣлимой главной фермѣ. Если при изслѣдованіи r-разъ статически неопредѣлимой фермы желаемъ примѣнить уравненія (1) не ко всѣмъ статически неопредѣлимымъ величинамъ X, а только къ извѣстному числу ихъ $i: X_a, X_b, \ldots X_i$, то ферма, находящаяся подъ дѣйствіемъ нагрузокъ P_m, X_a, X_b, ... X_i, будетъ $(r-i)$-разъ статически неопредѣлима (такую ферму опять назовемъ основной—главной фермой); для этой статически неопредѣлимой фермы необходимо будетъ опредѣлить перемѣщенія δ_{ma}, δ_{aa}, δ_{ab}, ..., соотвѣтствующія состояніямъ нагрузки $X_a = -1$, $X_b = -1$, ... $X_i = -1$. Если $i = r-1$, то останется только одно уравненіе съ одной неизвѣстной X.

Пусть, напр., требуется построить линію вліянія для сопротивленія X_a опоры a въ балкѣ, лежащей на 7 опорахъ, фиг. 101. Пусть всѣ опоры будутъ неподвижны. Поперечныя сѣченія постоянны по всей длинѣ.

Устранимъ опору a, и къ балкѣ, лежащей теперь на 6 опорахъ, приложимъ къ точкѣ a грузъ, равный 1, построимъ потомъ для этого состоянія нагрузки съ помощью постоянной точки R площадь моментовъ (на фиг. 102 эта площадь заштрихована) и наконецъ вычертимъ линію прогибовъ, соотвѣтствующую этой площади моментовъ. Тогда получимъ

$$0 = \Sigma P_m \delta_{ma} - X_a \delta_{aa}, \text{ откуда}$$

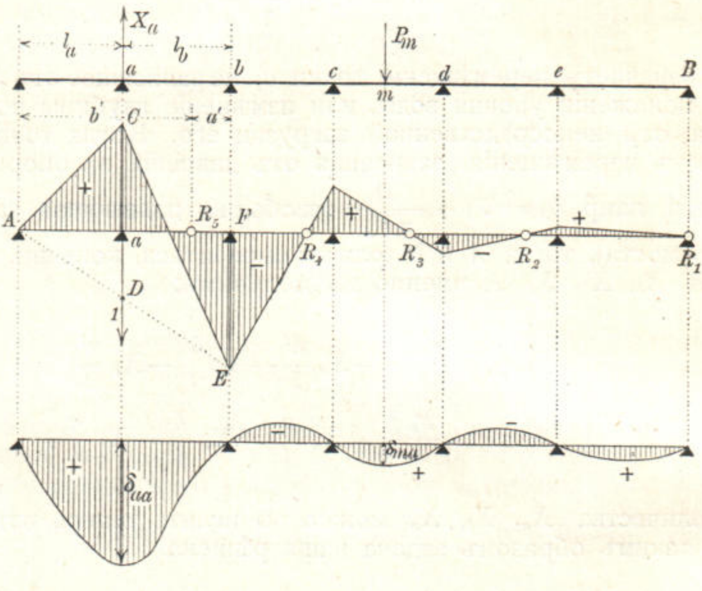
$$X_a = \Sigma \frac{P_m \delta_{ma}}{\delta_{aa}}.$$

Построенная линія прогибовъ будетъ линіей вліянія для количества X_a; множитель ея равняется $1 : \delta_{aa}$.

Фиг. 101.

Фиг. 102.

Фиг. 103.



Опорный моментъ $\overline{FE} = M_{ba}$ *) на фиг. 102 по второму уравненію изъ группы (14), стр. 40 **), равняется:

$$M_{ba} = \frac{1}{\varkappa'} \frac{N_b}{l_a + l_b}, \text{ гдѣ } \varkappa' = \frac{a'}{b'},$$

а по уравненію (8), стр. 36, и уравн. (13), стр. 31, имѣемъ

$$N_b = -1 \frac{l_a\, l_b\, (2l_a + l_b)}{l_a + l_b}.$$

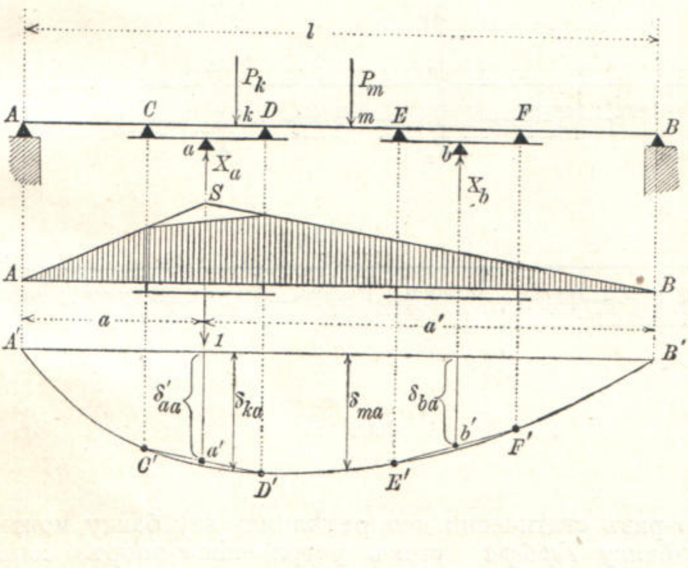
Для опредѣленія точки a' надо отложить отъ прямой AE отрѣзокъ $\overline{CD} = 1 \cdot \frac{l_a l_b}{l_a + l_b}$.

---

*) M_{ba} означаетъ моментъ для сѣченія b отъ дѣйствія причины $X_a = -1$.
**) Первое уравненіе изъ группы (14) къ первому пролету не примѣнимо.

32. Опоры съ подбалками. На фиг. 104 представлена балка, сопротивленія опоръ которой X_a и X_b приложены не непосредственно къ самой балкѣ. а передаются съ помощью промежуточныхъ балокъ CD и EF. Такимъ образомъ балка AB поддерживается по концамъ двумя опорами A и B, а также двумя *подбалками* CD и EF. Площадь моментовъ для состоянія $X_a = -1$ построена на фиг. 105; треугольникъ моментовъ ASB, соотвѣтствующій непосредственной нагрузкѣ, имѣетъ высоту $1\,\frac{aa'}{l}$. На фиг. 106 построена линія прогибовъ $A'C'D'E'F'B'$, соотвѣтствующая заштрихованной площади моментовъ. Если принять сначала, что подбалка CD жесткая, то точка a' будетъ лежать на прямой $C'D'$ и тогда $\delta_{aa} = \delta'_{aa}$. Но подбалка CD имѣетъ въ точкѣ a прогибъ $\delta''_{aa} = 1\,\frac{e'^2 e''^2}{3EJ'e}$, гдѣ J' означаетъ моментъ инерціи площади поперечнаго сѣченія подбалки; кромѣ того имѣемъ

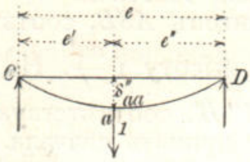
$$\delta_{aa} = \delta'_{aa} + \delta''_{aa}.$$



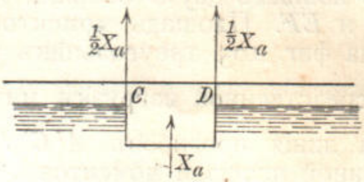
Фиг. 104.
Фиг. 105.
Фиг. 106.

Точка же b' лежитъ на прямой $E'F'$, если дѣйствуетъ только причина $X_a = -1$; такимъ образомъ δ_{ba} равно ординатѣ точки b'. Подобнымъ же путемъ изслѣдуется случай нагрузки $X_b = -1$ Дальнѣйшее изслѣдованіе одинаково съ изслѣдованіемъ въ № 30.

Подобный родъ опоръ встрѣчается между прочимъ въ понтонныхъ мостахъ, прогоны которыхъ лежатъ непосредственно на бортахъ, фиг. 108; въ виду незначительности угла наклоненія понтона можно всегда считать, что *жесткая* подбалка CD подперта *въ серединѣ* и что точка опоры ея a получаетъ пониженіе $\delta_a = \delta'_a + \frac{X_a}{\gamma F_a}$.



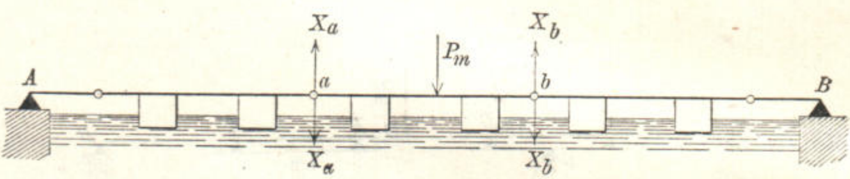
Фиг. 107.

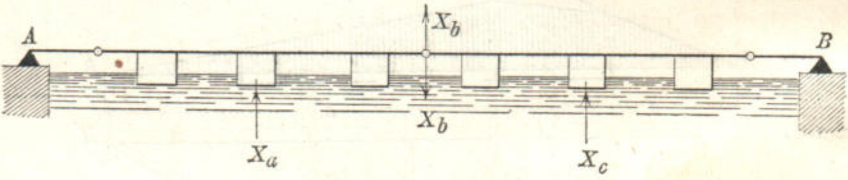


Фиг. 108.

33. Статически неопредѣлимыя балки съ шарнирами. Каждая балка, лежащая на n опорахъ, путемъ введенія $(n-2)$ среднихъ шарнировъ можетъ быть сдѣлана статически опредѣлимой *). Если же число шарнировъ только $(n-2-r)$, то балка

Фиг. 109.





Фиг. 110.

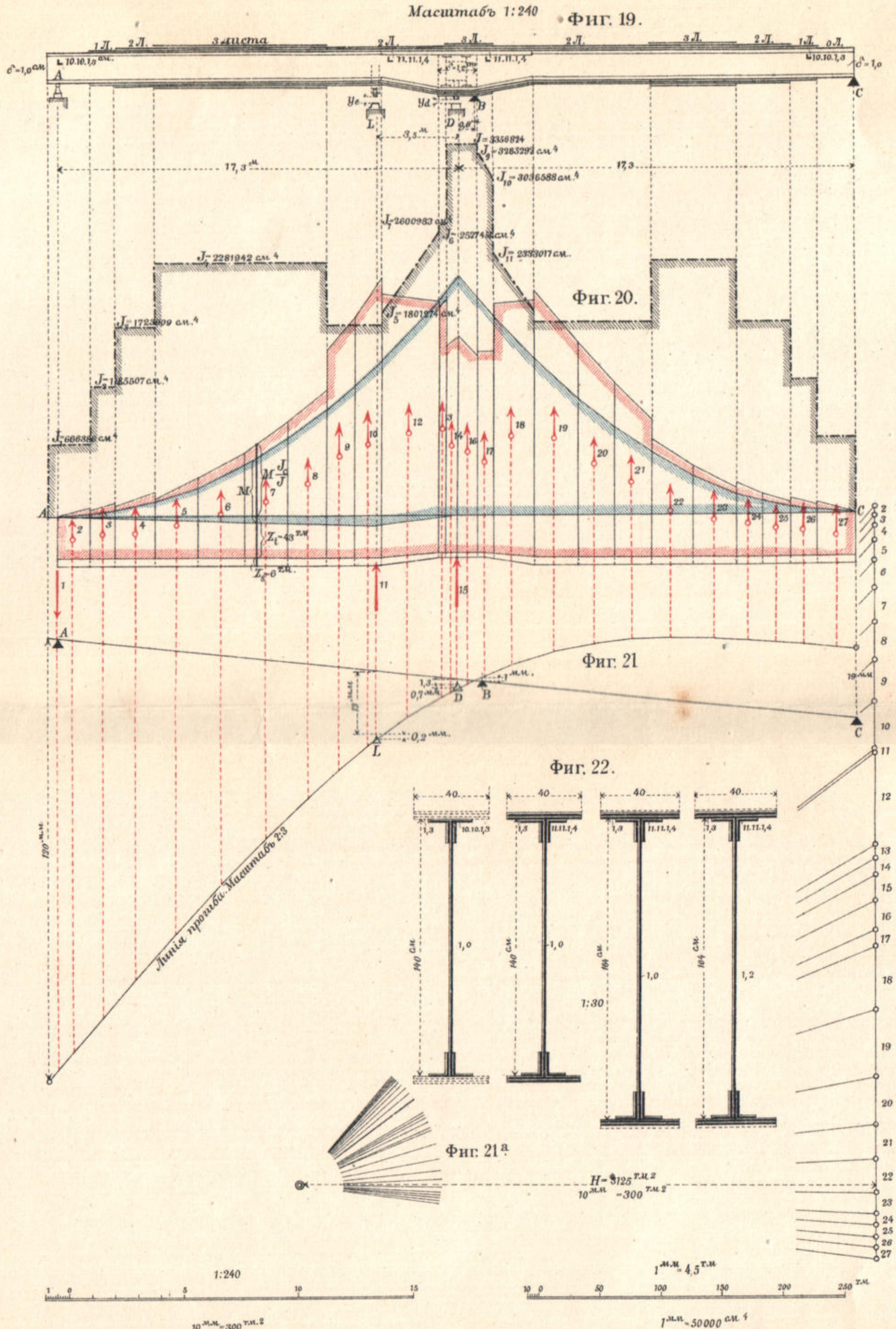
будетъ r-разъ статически неопредѣлима; эту балку можно превратить въ балку *Гербера* путемъ устраненія r-опоръ, сопротивленія которыхъ пусть будутъ X_a, X_b, X_c, . . . : тогда къ такой статически опредѣлимой основной фермѣ можно примѣнить уравненія (1) **).

---

*) См. томъ I, стр. 9. (выпускъ II) и отдѣлъ VI (выпускъ II).
**) На этомъ мѣстѣ нѣмецкій подлинникъ прерывается.

Прим. перевод.

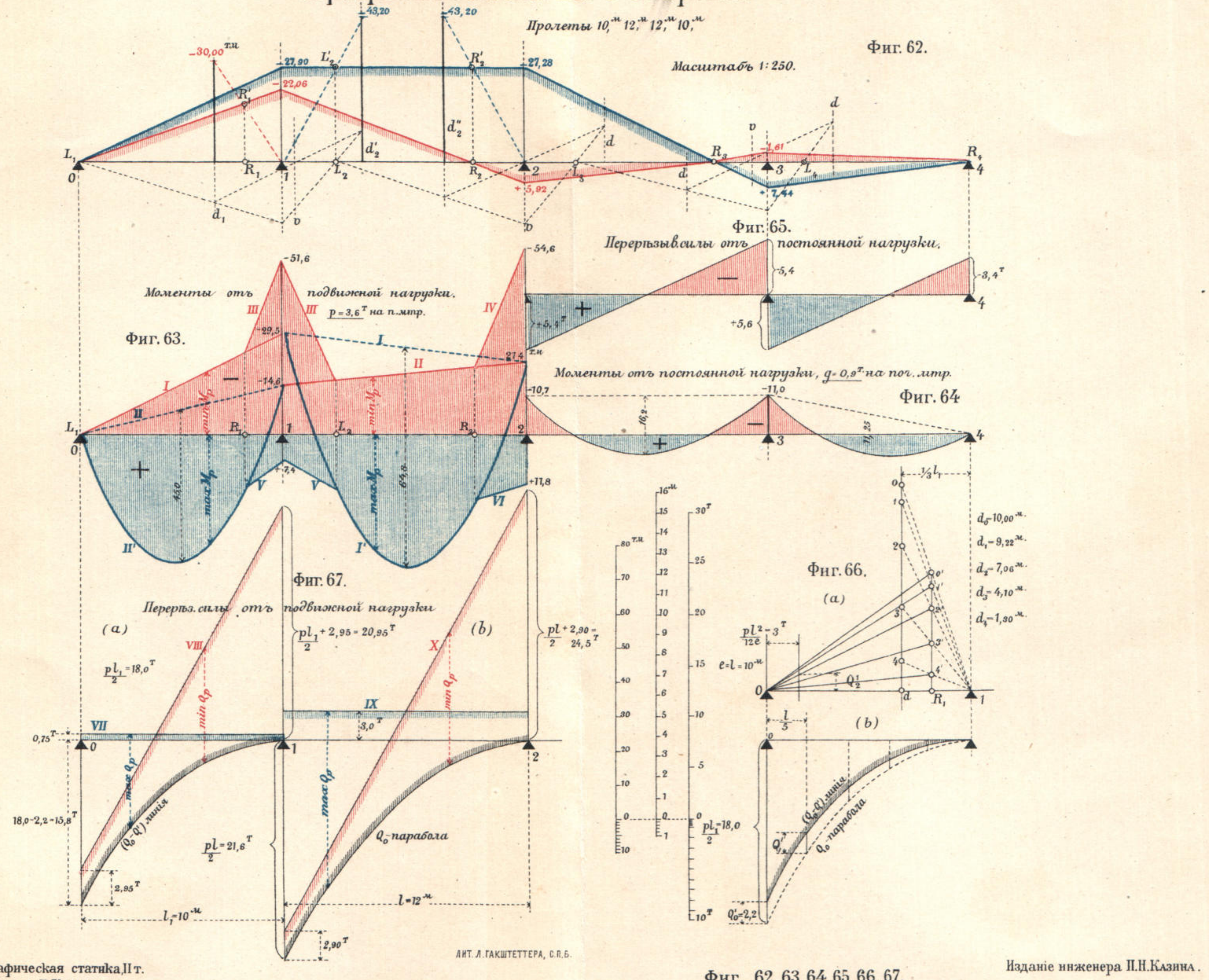
Опредѣленіе прогиба открытаго поворотнаго моста системы Шведлера. (№ 8, в.)



Müller-Breslau. Графическая статика II т.
Г. Кривошеинъ и П. Казинъ.
ЛИТ. А. ГАКШТЕТТЕРА С.П.Б.
Изданіе инженера П. Н. Казина.

Фиг. 19, 20, 21, 22.

Неразрѣзная балка на 5 опорахъ.



Müller-Breslau. Графическая статика, II т.
Г. Кривошеинъ и П. Казинъ.

ЛИТ. Л. ГАКШТЕТТЕРА, С.П.Б.

Изданіе инженера П. Н. Казина.

Фиг. 62, 63, 64, 65, 66, 67.

660

ЦѢНА ПОЛНАГО ИЗДАНІЯ

2 тома—10 выпусковъ, объемъ около 65 печатныхъ листовъ съ 1000 чертежами въ текстѣ и 16 литографированными таблицами).

по подпискѣ въ книжныхъ магазинахъ — **12** рублей.

Для гг. студентовъ техническихъ заведеній по подпискѣ у издателя — (С.-Петербургъ, Фонтанка 24, кв. 9) — **8** рублей.

За пересылку по вѣсу и разстоянію налагается платежъ.

Отдѣльные выпуски продаваться не будутъ.

Клише изготовлены въ художественномъ заведеніи А. И. Вильборга,
СПБ. Мѣщанская, 2.